МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО


Старков А.С., Тестов Ю.Н.


# УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## Учебно-методическое пособие

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО


Санкт-Петербург

2017

# СОДЕРЖАНИЕ

## 1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пусть $t(x, y, z, \tau)$ – температура, $\tau$ – время, $ds$ – элемент площади поверхности тела, $\overline{n}_0$ – орт нормали к поверхности, направленный по направлению потока теплоты, то есть в сторону уменьшения температуры. Тогда $\frac{\partial \mathrm{t}}{\partial \overline{n}_0} < 0$.

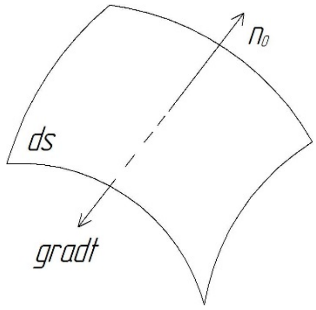



Рис. 1.1

Производная $\frac{\partial t}{\partial \overline{n}_0}$ равна проекции *gradt* на направление $\overline{n}_0$, то есть

$\frac{\partial t}{\partial \bar{n}_0} = grad_{\bar{n}_0} t$ .

По закону (гипотезе) Фурье количество теплоты, протекающее через поверхность *ds* за время $d\tau$ в направлении $\overline{n}_0$, равно

$$dQ = -\lambda \frac{\partial t}{\partial \bar{n}_0} ds d\tau, \qquad (1.2)$$

где $\lambda>0$ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности, *Вт/м*К* или *ккал/м*ч*К*.

Для определенности рассмотрим случай, когда тело *(V)*, ограниченное поверхностью *(S)*, нагревается, тогда $\overline{n}_0$ – орт внутренней нормали.

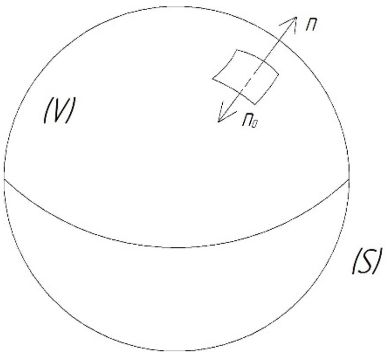



Рис. 1.2

Возьмем орт внешней нормали $\overline{n} = -\overline{n}_0$.

Из (1.1) и (1.2) получим

$dQ = \lambda grad_{\bar{n}} t \cdot ds d\tau$ .

Количество теплоты, протекающее через всю поверхность *(S)* за время $d\tau$ , равно

$Q = d\tau \oiint_{(s)} \lambda grad_{\bar{n}} t ds$ .

По теореме Гаусса-Остроградского поток вектора $\overline{a}$ через замкнутую поверхность *(S)*равен

$$\oiint_{(s)} a_n ds = \iiint_{(v)} div \bar{a} dv . \qquad (1.5)$$

Применяя эту теорему получим

$$Q = d\tau \oiint_{(s)} \lambda grad_{\bar{n}} t ds = d\tau \iiint_{(v)} div(\lambda gradt) dv . \qquad (1.6)$$

За счет поглощаемой теплоты тело нагревается. Пусть за время $d\tau$ температура элемента объема *dv*повысилась на *dt*. При этом поглощается количество теплоты

$$c\rho dvdt = c\rho dv\frac{\partial t}{\partial \tau}d\tau ,$$

где $\rho$ – плотность, *кг/м*$^3$; $c$ – удельная теплоемкость, *Дж/(кг·К)* или *ккал/(кг·К),* которые предполагаем постоянными. Общее количество теплоты, поглощаемое всем телом *(V)*за время $d\tau$, равно

$$Q = d\tau\iiint_{(v)} c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}dv . \qquad (1.7)$$

Приравнивая правые части равенств (1.6) и (1.7), получим

$$\iiint_{(v)} c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau}dv = \iiint_{(v)} div(\lambda gradt)dv ,$$

или

$$\iiint_{(v)} (c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} - div(\lambda gradt))dv = 0 .$$

Это равенство должно выполняться для произвольного объема *(V)*, где происходит теплообмен, а это возможно в том и только в том случае, если подынтегральная функция равна нулю. Отсюда следует равенство

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = div(\lambda gradt) . \qquad (1.8)$$

Будем считать $\lambda$ постоянным. Тогда

$$\lambda gradt = \lambda\frac{\partial t}{\partial x}\bar{\imath} + \lambda\frac{\partial t}{\partial y}\bar{\jmath} + \lambda\frac{\partial t}{\partial z}\bar{k} ,$$

$$div(\lambda gradt) = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)$$

и уравнение (1.8) можно записать в виде

$$c\rho\frac{\partial t}{\partial \tau} = \lambda\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \qquad (1.9)$$

Выражение $\frac{\lambda}{c\rho} = a$ называют коэффициентом температуропроводности. Тогда уравнение (1.9) примет вид

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right). \qquad (1.10)$$

Это есть уравнение теплопроводности в случае, когда теплофизические характеристики постоянные, а температура зависит от времени и трех координат.

В случае одномерной задачи, когда $t = t(x,\tau)$ , получим уравнение

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}. \qquad (1.11)$$

Это уравнение теплопроводности для теплоизолированного стержня, для неограниченной пластины.

Под неограниченной пластиной понимают пластину, толщина которой конечна, а длина и ширина не ограниченные. На практике можно считать, что эти условия выполнены, если длина и ширина велики по сравнению с толщиной. Ниже будут подробно рассмотрены задачи именно для такой пластины.

Но для решения каждой конкретной задачи, кроме дифференциального уравнения, должны быть заданы условия, специфические именно для этой задачи.

Так, чтобы найти температурное поле тела в любой момент времени, нужно знать распределение температуры в начальный момент времени, начальные условия и закон взаимодействия тела с окружающей средой, граничные условия.

При решении задач мы будем использовать граничные условия двух типов:

1. Граничное условие первого рода, когда задана температура поверхности тела в любой момент времени.
2. Граничное условие третьего рода, когда известна температура среды, а на поверхности тела происходит конвективный теплообмен (об этом граничном условии ниже будет сказано подробнее).

## 2. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Пусть неограниченная пластина толщиной $2R$с постоянной начальной температурой $t_н$ охлаждается при условии, что на ее поверхностях в течение всего процесса охлаждения поддерживается температура равная нулю. Требуется определить температуру $t(x,\tau)$, удовлетворяющую следующим условиям:

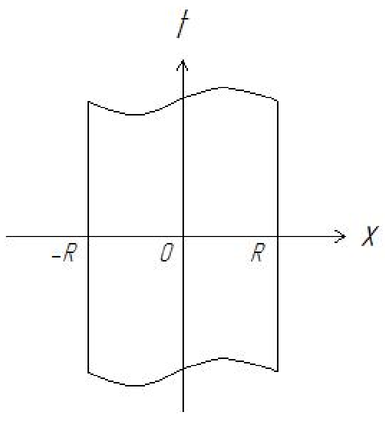



Рис. 2.1

уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \ ;$$

начальному условию

$$t(x,0) = t_{\text{н}} \ ;$$

граничным условиям

$$t(R,\tau) = 0 \ .$$

$$t(-R,\tau) = 0 \ . \qquad (2.4)$$

Это однородная задача, так как граничные условия однородные, $t(x,\tau)=0$ им удовлетворяет.

Условие (2.4) можно заменить следующим

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\,, \tag{2.5}$$

что означает отсутствие потока тепла в плоскости $x=0$ и следует из симметрии температурного поля пластины в заданных условиях.

Одним из способов решения задач подобного типа является метод разделения переменных, или метод Фурье, которым мы и воспользуемся для решения поставленной задачи (2.1) – (2.5). Метод состоит в том, что ищется решение уравнения (2.1) в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной

$$t(x,\tau) = T(\tau)\cdot X(x)\,. \tag{2.6}$$

Подставив эту функцию в уравнение (2.1) получим $XT' = aX''T$ или

$$\frac{T\prime}{T} = a\frac{X\prime\prime}{X}\,. \tag{2.7}$$

Равенство (2.7)должно быть тождеством. Это возможно только в том случае, если обе его части равны одному и тому же постоянному числу, которое оказывается удобным обозначить$-an^2$ ,где $a$–коэффициент температуропроводности, а $n$– неизвестное пока число. Итак, требуется решить два уравнения:

$$\frac{T\prime}{T} = -an^2,\quad aX'T = -an^2\,. \tag{2.8}$$

Решение первого из них имеет вид

$$T = Ce^{-an^2\tau}\,. \tag{2.9}$$

Знак минус перед$an^2$ выбран потому, что показатель степени в (2.9) должен быть отрицательным, так как иначе $t(x,\tau)$неограниченно возрастала бы при $\tau\to+\infty$ . Второе из уравнений (2.8) есть уравнение гармонических колебаний $X''+n^2X=0$ , а его решением является

$$X = C_1\cos nx + C_2\sin nx\,. \tag{2.10}$$

Перемножив $T$и $X$из (2.9) и (2.10) и обозначив произвольные постоянные $C\cdot C_1 = A$ $C\cdot C_2 = B$ , получим решение уравнения (2.1) в виде

$$t(x,\tau) = e^{-an^2\tau}(A\cos nx + B\sin nx)\,. \tag{2.11}$$

Выражение для $t(x,\tau)$ из (2.11) удовлетворяет уравнению (2.1) при любых значениях произвольных постоянных $n$, $A$и $B$. Для определения их используем (2.2), (2.3) и (2.5).

Из условия (2.5) $\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.e^{-an^2\tau}(-An\sin nx + Bn\cos nx)\right|_{x=0} = 0$ или$e^{-an^2\tau}Bn = 0$ . Отсюда $B=0$,так как при $n=0$ получили бы $t=const$ .

Подставив $B=0$ в (2.11), получим решение в виде

$$t(x,\tau) = Ae^{-an^2\tau}\cos nx\,. \tag{2.12}$$

Воспользуемся теперь условием (2.3) $t(R,\tau)=0$ ,$t(R,\tau)=Ae^{-an^2\tau}\cos nR=0$ . Коэффициент $A\neq 0$ ,так как иначе получили бы тривиальное решение $t(x,t)=0$ , следовательно,

$$\cos nR = 0\,. \tag{2.13}$$

Это уравнение, называемое характеристическим уравнением задачи, имеет бесчисленное множество корней. Обозначив $nR=\mu$ , получим

$$nR = \mu = \frac{(2K-1)\pi}{2}, \qquad \text{где } K = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Каждому значению $K$соответствует свой корень $\mu_K$ ,

$$\mu_K = n_K R = \frac{(2K-1)\pi}{2}, \qquad (K = 0, \pm1, \pm2, \ldots)\,. \tag{2.14}$$

Обозначим $an_K^2=\dfrac{a(2K-1)^2\pi^2}{4R^2}=\lambda_K$ .

Числа $\lambda_K$ называются собственными (характеристическими) числами задачи, а функции $\cos n_K x=\cos\sqrt{\dfrac{\lambda_K}{a}}x$ называются собственными функциями задачи. При $K=1,2,...$ все собственные функции различны. Если же взять $K=0,-1,-2,...$ , то новых собственных функций не получим. Таким образом, нашлось множество функций вида (2.12)

$$t_K(x,\tau) = A_K e^{-\frac{a\mu_K^2\tau}{R^2}}\cos\frac{\mu_K x}{R}, \qquad K = 1, 2, \ldots,$$

где $\mu_K$ определены формулой (2.14).

Так как уравнение (2.1) линейное, то оно обладает свойством суперпозиции и ряд

$$t(x,\tau) = \sum_{K=1}^{\infty} A_K e^{-\frac{a\mu_K\tau}{R^2}}\cdot\cos\frac{\mu_K x}{R} \tag{2.15}$$

является решением этого уравнения, если он сходится и его можно почленно дифференцировать два раза по $x$и один раз по $\tau$.

Допустим, что эти условия выполнены. Решение (2.15) удовлетворяет граничным условиям (2.3) и (2.5), так как каждый член ряда удовлетворяет этим условиям.

Вычислим коэффициенты $A_K$, используя условие (2.2), из которого при $\tau=0$ следует

$$t_{\text{н}} = \sum_{K=1}^{\infty} A_K \cos\frac{\mu_K x}{R}\,. \tag{2.16}$$

Покажем, что система функций $\cos\mu_K\dfrac{x}{R}, K=1,2,...$ ортогональна на $[0,R]$ . Пусть $j\neq K$ . Вычислим интеграл

$$\int_0^R \cos\mu_K \frac{x}{R}\cos\mu_i \frac{x}{R}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^R \left(\cos(\mu_K-\mu_i)\frac{x}{R}+\cos(\mu_K+\mu_i)\frac{x}{R}\right)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\mu_K-\mu_i)\,R}{\mu_K-\mu_i}+\frac{\sin(\mu_K+\mu_i)\,R}{\mu_K+\mu_i}\right)=0$$

так как $\mu_K \pm \mu_i = \frac{\pi}{2}((2K-1)\pm(2i-1))$ есть число кратное π.

Так как $t(x,0)=t_н$ удовлетворяет на $[0,R]$ условиям Дирихле (она в данном случае постоянна), то (2.16) – это ряд Фурье для $t_н$, коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$A_K = \frac{\int_0^R t_н \cos\mu_K \frac{x}{R}dx}{\int_0^R \cos^2\mu_K \frac{x}{R}dx}. \tag{2.17}$$

Если начальная температура не постоянна и условие (2.2) имеет вид $t(x,0)=f(x)$, где $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то

$$A_K = \frac{\int_0^R f(x)\cos\mu_K \frac{x}{R}dx}{\int_0^R \cos^2\mu_K \frac{x}{R}dx}.$$

Вычислим интегралы, входящие в (2.17).

$$\int_0^R t_н \cos\mu_K \frac{x}{R}dx = t_н\frac{R}{\mu_K}\sin\mu_K = (-1)^{K+1}\cdot\frac{2t_н R}{(2K-1)\pi};$$

$$\int_0^R \cos^2\mu_K \frac{x}{R}dx = \frac{1}{2}\int_0^R (1+\cos 2\mu_K \frac{x}{R})dx = \frac{1}{2}R.$$

Итак, $A_K = (-1)^{K+1}\dfrac{4t_н}{(2K-1)\pi}$.

Подставив эти значения $A_K$ в (2.15), получим отрицательное решение задачи в виде

$$t(x,\tau) = \frac{4t_н}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^{K+1}}{2K-1}e^{-\frac{\mu_K^2 a\tau}{R^2}}\cdot\cos\mu_K\frac{x}{R}. \tag{2.18}$$

Можно показать, что этот ряд сходится при любом $x\in[-R,R]$ и любом $\tau$.

Как уже было сказано выше, решение получено при условии, что ряд можно почленно дифференцировать. Достаточным условием для возможности почленного дифференцирования и интегрирования ряда является существование числового знакоположительного сходящегося ряда, мажорантного для ряда (2.18).

В учебниках по математической физике, например в [I], доказывается, что такой ряд существует.

Выше была рассмотрена задача для случая, когда температура поверхностей пластины равна нулю. Пусть теперь на поверхностях температура постоянна и $\tau_c \neq 0$ . Тогда вместо (2.1)…(2.4) получим

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \tag{2.19}$$

$$t(x,0) = t_н \tag{2.20}$$

$$t(R,\tau) = t_c\,, \tag{2.21}$$

$$t(-R,\tau) = t_c\,. \tag{2.22}$$

Задача (2.19)…(3.22) – неоднородная, $t(x,\tau) = 0$ не удовлетворяет граничным условиям. Сделаем замену переменной так, чтобы граничные условия стали однородными. Для этого положим $v(x,\tau) = t(x,\tau) - t_c$ . Тогда задача примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{2.23}$$

$$v(x,0) = t(x,0) - t_c = t_н - t_c\,, \tag{2.24}$$

Решение для задачи (2.23)…(2.26) можно записать, воспользовавшись формулой (2.18), полученной для аналогичной задачи (3.1)…(3.4), но роль $t_н$ теперь играет $t_н - t_c$ , и получим решение

$$v(x,\tau) = t(x,\tau) - t_c = \frac{4(t_н - t_c)}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{-1^{K+1}}{2K-1}e^{\frac{\mu_K^2 a\tau}{R^2}}\cdot\cos\mu_K\frac{x}{R}. \tag{2.27}$$

Отсюда, подставив значения $\mu_K$ из (2.14), получим

$$t(x,\tau) = t_c + \frac{4(t_н - t_c)}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(-1)^{K+1}}{2K-1}e^{-\frac{(2K-1)^2\pi^2 a\tau}{4R^2}}\cdot\cos\frac{(2K-1)\pi x}{2R}. \tag{2.28}$$

## 3. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННОГО РЕШЕНИЯ. СРЕДНЕОБЪЕМНАЯ ТЕМПЕРАТУРА. РАСХОД ТЕПЛА

Из выражения (2.28) следует, что температура является функцией нескольких аргументов.

Чтобы решение записать в более удобной форме и при этом уменьшить число переменных, введем следующие обозначения

$$\theta(x,\tau) = \frac{t(x,\tau) - \tau_c}{t_н - t_c} \tag{3.1}$$

относительная температура, $0 \le \theta \le 1$ ;

$$F_0 = \frac{a\tau}{R^2} \tag{3.2}$$

критерий Фурье ;

$\frac{x}{R}$ – относительная координата, $\left|\frac{x}{R}\right| \le 1$ .

Все эти величины безразмерные. Тогда выражение (2.28) запишется в виде

$$\theta(x,\tau) = \frac{4}{\pi}\sum_{K=1}^{\infty} \frac{(-1)^{K+1}}{2K-1} e^{-\frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}F_0} \cdot \cos\frac{(2K-1)\pi}{2}\cdot\frac{x}{R}. \qquad (3.3)$$

Относительная температура является функцией только двух переменных, $\theta = f(F_0, \frac{x}{R})$ .Быстрота сходимости ряда (3.3) в основном зависит от величины $F_0$ .Если $F_0$ достаточно велико, то ряд сходится быстро и для вычисления $\Theta$достаточно одного-двух членов ряда. Так, если $F_0 \geq 0{,}4$ , то можно взять один член ряда, если не требуется большая точность вычисления $\Theta$. Если $F_0$ мало, то приходится брать несколько членов ряда. Заметим, что решение рассмотренной задачи другими способами позволяет получить выражение для $t(x,\tau)$ удобное именно для малых значений $F_0$[3].

Запишем (3.3) в развернутом виде

$$\theta = \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi x}{2R}e^{-\frac{\pi^2 F_0}{4}} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi x}{2R}e^{-\frac{9\pi^2 F_0}{4}} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi x}{2R}e^{-\frac{25\pi^2 F_0}{4}} - \ldots\right)$$

и рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Вычислить температуру осевой плоскости $x = 0$ ,если $F_0 = 0{,}6$

$$\theta = \frac{4}{\pi}\left(e^{-\frac{\pi^2 0,6}{4}} - \frac{1}{3}e^{-\frac{9\pi^2 0,6}{4}} + \frac{1}{5}e^{-\frac{25\pi^2 0,6}{4}} - \ldots\right).$$

Первый член ряда $e^{-\frac{\pi^2 0,6}{4}} = e^{-0,15\pi^2} = 0{,}2276$ , второй член $e^{-\frac{9\pi^2 0,6}{4}} = e^{-1,35\pi^2} < 0{,}000002$ мал, поэтому можно ограничиться одним членом ряда, $\theta = \frac{4}{\pi}\cdot 0{,}2276 = 0{,}2897$ .

Пример 2.

Вычислить относительную температуру пластины, если $F_0 = 0{,}05$ и $\frac{x}{R} = 0{,}5$ .

Чтобы получить три верных значащих цифры, приходится брать четыре члена ряда

$$\theta = \frac{4}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{4}e^{-0,012\pi^2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{4}e^{-0,1125\pi^2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{4}e^{-0,312\pi^2} - \frac{1}{7}\cos\frac{7\pi}{4}e^{-0,45\pi^2}\right) =$$

$$= 1{,}273\cdot 0{,}7071\left(0{,}8839 + \frac{1}{3}0{,}3295 - \frac{1}{5}0{,}04576 - \frac{1}{7}0{,}0237\right) = 0{,}886.$$

Пример 3.

Пусть имеется пластина толщиной $2R = 0{,}2м$, $t_н = 35°C$, $t_с = 5°C$, $a = 0{,}0005 м^2/ч$.

Найти температуру в центре пластины через 10 часов после начала охлаждения.

$$F_0 = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0{,}0005\cdot 10}{0{,}01} = 0{,}5.$$

Так как значение $F_0$ достаточно велико, ограничимся одним членом ряда,

$$\theta = \frac{4}{\pi} e^{\frac{-\pi^2 0{,}5}{4}} \cos 0 = 0{,}3707\,.$$

$$\theta = \frac{t - t_c}{t_н - t_c},$$

$$0{,}3707 = \frac{t-5}{35-5}\text{, откуда } t = 16{,}1°\text{C}\,.$$

Решение в виде ряда (2.28) или (3.3) позволяет, взяв один или несколько членов ряда, найти температуру пластины в заданной точке в любой момент времени. Часто приходится решать и другие задачи, например, найти время $\tau$достижения в определенной точке заданной температуры или найти точку $x$, где в заданный момент времени будет достигнута заданная температура. Для решения на практике таких задач, чтобы избежать громоздких расчетов, пользуются готовыми графиками, составленными по формуле (3.7). Такие графики (монограммы) приведены во всех учебниках по теории теплопроводности [3,4], а у нас даны на рис. 4.1 (все графики внесены в конец работы).

На оси ординат отложены значения $\Theta$. Чтобы иметь возможность поместить значения $F_0$ на оси абсцисс в возможно большем диапазоне, на этой оси принята не равномерная, а логарифмическая шкала.

На рис. 4.1 приведены графики зависимости $\Theta$от $F_0$ для различных значений величины $1-\dfrac{x}{R}$ .

Рассмотрим пример использования номограммы.

Пример 4.

Определить, через сколько времени в точке $x = 0{,}07\,м$ температура будет равна $20°C$ , если $R = 0{,}1$ м, $t_н = 35°C$ , $t_c = 0°C$ , $a = 0{,}0005 м^2/ч$ . Тогда $\dfrac{x}{R} = 0{,}70$ ; $I - \dfrac{x}{R} = 0{,}30$ ; $\theta = \dfrac{20-0}{35} = 0{,}57$ . На кривой для $I - \dfrac{x}{R} = 0{,}3$ найдем точку с ординатой $\theta = 0{,}57$ . Ее абсцисса $F_0 \approx 0{,}073$ , откуда

$$\tau = \frac{F_0 \cdot R^2}{a} = \frac{0{,}073 \cdot 0{,}225}{0{,}0005} = 3{,}3\text{ часа.}$$

При решении многих задач теплопередачи требуется вычислять количество теплоты, которое отдает тело при охлаждении, а для этого нужно знать среднеобъемную температуру тела в заданный момент времени. Если температура тела зависит от трех координат $x, y, z$ и времени $\tau$, то среднеобъемная температура вычисляется по формуле

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{v}\iiint_{(v)} t(x,y,z,\tau)dx\,, \tag{3.4}$$

В случае неограниченной пластины толщиной $2R$ при симметричном распределении температуры

$$\bar{t}(\tau) = \frac{1}{R}\int_0^R t(x,\tau)dx\,, \tag{3.5}$$

а относительная среднеобъемная температура

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{\bar{t}(\tau)-t_c}{t_{н}-t_c} = \frac{1}{R}\int_0^R \theta(x,\tau)dx\,. \tag{3.6}$$

Подставив ы (3.6) выражение для $\Theta$из (3.3) и интегрируя почленно ряд (это возможно в силу замечания, сделанного в параграфе 3), получим

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{(2K-1)^2}e^{-\frac{(2K-1)^2\pi^2F_0}{4}}\,. \tag{3.7}$$

В этом ряде практически можно ограничиваться одним членом, когда $F_0 \geq 0{,}1$ . Если начальная температура тела постоянна и равна $t_н$ , то количество теплоты, отданное телом при его охлаждении от $t_н$ до среднеобъемной температуры $t$ , равно

$$Q_v = c\rho V \cdot (t_{н} - \bar{t})\,, \tag{3.8}$$

где *c* – удельная теплоемкость, $\rho$ – плотность, *V*–объем.

Пример 5.

Определить количество теплоты, отданное $1м^3$ пластины при охлаждении в течение 10 часов, если $R = 0{,}1м$, $a = 0{,}0005м^2/ч$, $t_н = 40°C$ , $t_c = 5°C$ , $\rho = 1000кг/м^3$, $c = 0{,}8ккал/кг \cdot К = 0{,}8 \cdot 4{,}1868 \cdot 10^3\, Дж/кг \cdot К$ .

$$F_0 = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0{,}0005\cdot 10}{0{,}01}0{,}5\,; \qquad \bar{\theta} = \frac{8}{\pi^2}e^{-\frac{\pi^2}{4}\cdot 0{,}5} = 0{,}236\,;$$

$$\frac{\bar{t}-5}{40-5} = 0{,}236\,; \bar{t} = 13{,}3℃\,; Q_v = 0{,}8 \cdot 4{,}1868 \cdot 10^3 \cdot 1000 \cdot 1(40-13{,}3) =$$

$$= 89 \cdot 10^6 Дж = 21 \cdot 10^3 \text{ ккал}\,.$$

## 4. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ТРЕТЬЕГО РОДА

Как уже отмечалось, по закону Фурье количество теплоты, протекающее через элемент поверхности $ds$ за время $d\tau$ , равно

$$dQ = -\lambda\frac{\partial t}{\partial n}dsd\tau\,. \tag{4.1}$$

По закону Ньютона количество теплоты, которым тело обменивается со средой, равно

$$dQ = \alpha(t_c - t_{п})dsd\tau \tag{4.2}$$

а в случае нагревания,

$$dQ = \alpha(t_п - t_c)dsd\tau \tag{4.3}$$

в случае охлаждения,

где $t_c$ – температура среды, $t_n$ – температура поверхности, α – коэффициент теплоотдачи теплообмена, Вт/(м$^2$) или ($ккал/м^2 \cdot K$) .

Приравняв правые части (4.1) и (4.2), а затем (4.1) и (4.3), получим граничные условия третьего рода

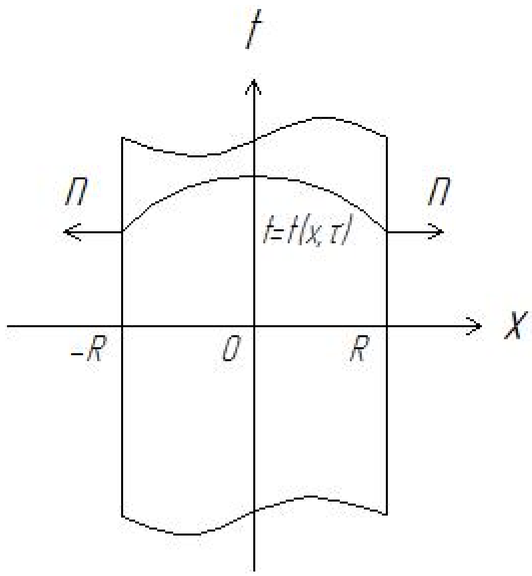
$$\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_п = -\frac{\alpha}{\lambda}(t_п - t_c) \tag{4.4}$$

в случае охлаждения,

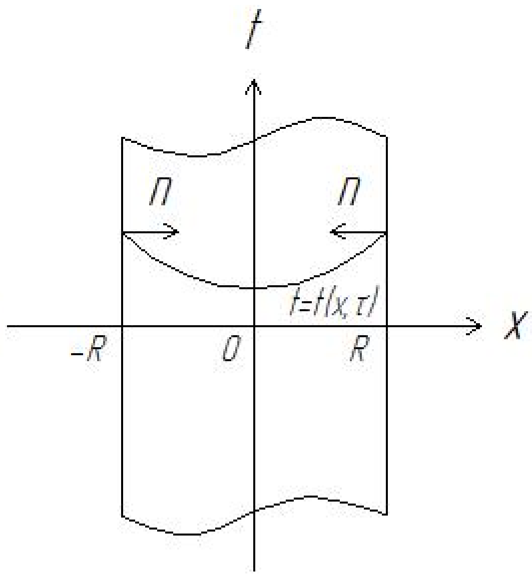
$$\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_п = \frac{\alpha}{\lambda}(t_п - t_c) \tag{4.5}$$

в случае нагревания. Здесь производная $\frac{\partial t}{\partial n}$ вычислена на поверхности.

Запишем эти два условия для обеих поверхностей неограниченной пластины.




Охлаждение




Нагревание

В случае охлаждения $\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{x=-R} = -\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=-R}$ ; $\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{x=R} = \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=R}$ .

В случае нагревания $\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{x=-R} = \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=-R}$ ; $\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{x=R} = -\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=R}$ .

Учитывая эти выражения и условия (4.4) и (4.5), получим, что граничные условия третьего рода для одной поверхности пластины записываются одинаково и в случае охлаждения, и в случае нагревания, а именно

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=R} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t(R,\tau) - t_c) , \tag{4.6}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=R} = \frac{\alpha}{\lambda}\left(t(-R,\tau) - t_c\right). \qquad (4.7)$$

## 5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задача 1.

Найти положительные корни уравнения

$$\mathrm{ctg}\mu = \frac{\mu}{B}, \qquad (5.1)$$

где B – постоянное число, $B > 0$ .

Это уравнение можно решить только приближенно. Построим графики функций $y = ctg\mu$ и $y = \frac{\mu}{B}$ .

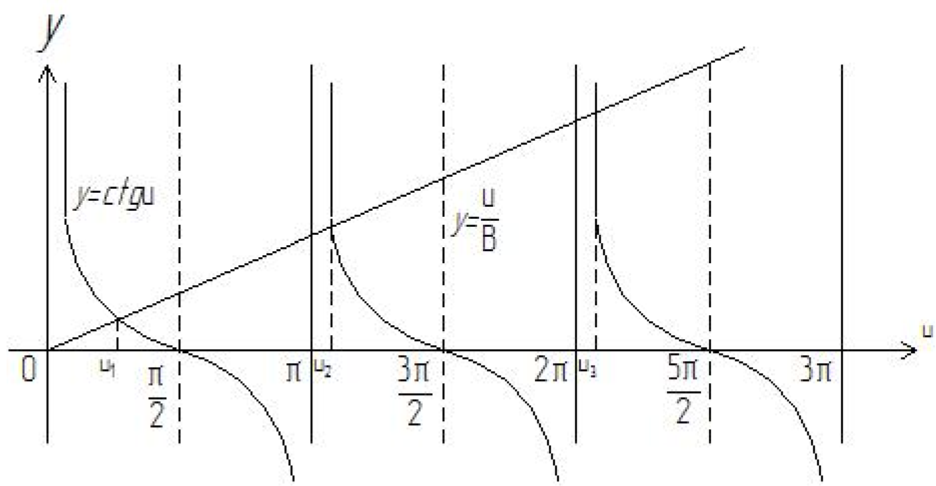



Рис. 5.1

Из этого рисунка видно, что уравнение имеет бесчисленное, но счетное множество корней $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ..., \mu_n, ...$ Очевидно, что $\mu_n \to \pi(n-1)$ при $n \to \infty$ , так что при больших значениях $n$ $\mu_n \approx \pi(n-1)$ . Но нас будут интересовать именно первые корни уравнения (5.1). Их можно вычислить приближенно. Таблица первых шести корней этого уравнения в зависимости от $B$ приведена, например, в [3]. В дальнейшем и мы приведем такую таблицу.

Задача 2.

Показать, что система функций $\cos\mu_1\frac{x}{R}, \cos\mu_2\frac{x}{R}, ..., \cos\mu_K\frac{x}{R}, ...,$ где $\mu_K$ – корни уравнения (5.1), ортогональна на $[-R, R]$ .

Уравнение (5.1) можно записать в виде

$$\mu\sin\mu = B\cos\mu. \qquad (6.2)$$

Пусть $k \neq 1$ . Вычислим интеграл

$$\int_{-R}^{R} \cos\mu_K \frac{x}{R} \cos\mu_i \frac{x}{R} dx = \int_0^R \left(\cos(\mu_K - \mu_i)\frac{x}{R} + \cos(\mu_K + \mu_i)\frac{x}{R}\right) dx =$$

$$= \frac{R}{\mu_K - \mu_i} \sin(\mu_K - \mu_i) + \frac{R}{\mu_K + \mu_i} \sin(\mu_K + \mu_i) =$$

$$= \frac{R}{\mu_K^2 - \mu_i^2}\Big((\mu_K + \mu_i)\sin(\mu_K - \mu_i) + (\mu_K - \mu_i)\sin(\mu_K + \mu_i)\Big) =$$

$$= \frac{R}{\mu_K^2 - \mu_i^2}(\mu_K(\sin(\mu_K - \mu_i) + \sin(\mu_K + \mu_i)) + \mu_i\,(\sin(\mu_K - \mu_i) - \sin(\mu_K + \mu_i))) =$$

$$= \frac{R}{\mu_K^2 - \mu_i^2}(2\mu_K \sin\mu_K \cos\mu_i - 2\mu_i \sin\mu_i \cos\mu_K) =$$

$$= \frac{R}{\mu_K^2 - \mu_i^2}(2B\cos\mu_K \cos\mu_i - 2B\cos\mu_i \cos\mu_K) = 0\,.$$

Последнее выражение записано из условия (5.2).

Таким образом, доказано, что система функций ортогональна на $[-R, R]$ .

Задача 3.

Разложить функцию $f(x)$ , заданную на $[-R, R]$ , в ряд Фурье по системе функций $\cos\mu_K \dfrac{x}{R}, K = 1,2,...,$ где $\mu_K$ - корни уравнения (5.1).

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно разложить в ряд

$$f(x) = \sum_{K=1}^{\infty} B_K \cos\mu_K \frac{x}{R}, \tag{5.3}$$

где

$$B_K = \frac{\int_{-R}^{R} f(x)\cos\mu_K \frac{x}{R} dx}{\int_{-R}^{R} \cos^2\mu_K \frac{x}{R} dx}. \tag{5.4}$$

Знаменатель равен

$$\int_{-R}^{R} \cos^2\mu_K \frac{x}{R} dx = \int_0^R \left(1 + \cos 2\mu_K \frac{x}{R}\right) dx = R\frac{\mu_K + \sin\mu_K \cos\mu_K}{\mu_K}.$$

Пусть, в частности, $f(x) = t_н$ , где $t_н$ – постоянное число. В этом случае числитель формулы (5.4) равен

$$\int_{-R}^{R} t_{\text{н}} \cos\mu_k \frac{x}{R} dx = 2t_{\text{н}} \frac{R}{\mu_K} \sin\mu_K\,.$$

Тогда

$$B_K = \frac{2t_{\text{н}} \sin\mu_K}{\mu_K + \sin\mu_K \cos\mu_K}, \tag{5.5}$$

$$t_{\text{н}} = \sum_{K=1}^{\infty} B_K \cos\mu_K \frac{x}{R}. \tag{5.6}$$

## 6. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

Пластина толщиной $2R$ с постоянной начальной температурой охлаждается в среде, температура которой $t_c = 0$. На поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен. Найти температуру $t(x,\tau)$.

Для этого нужно решить следующую задачу

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\ ; \tag{6.1}$$

$$t(x,0) = t_{\text{н}}\ ; \tag{6.2}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=R} = -\frac{\alpha}{\lambda}t(R,\tau)\ ; \tag{6.3}$$

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=-R} = -\frac{\alpha}{\lambda}t(-R,\tau)\ ; \tag{6.4}$$

где (6.3) и (6.4) – граничные условия третьего рода при $t_c = 0$.

Вместо условия (6.4) можно взять следующее

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = 0\ . \tag{6.5}$$

Как было показано в параграфе 2, решение уравнения (6.1) имеет вид

$$t(x,\tau) = e^{-an^2\tau}(B\cos nx + A\sin nx)\ .$$

Из условия (6.5)

$$\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x=0} = e^{-an^2}(-Bn\sin nx + An\cos nx)\Big|_{x=0} = e^{-an^2\tau}An = 0\ ,$$

откуда $A = 0$. Тогда решение уравнения (6.1) при условии (6.5) будет записано в виде

$$t(x,\tau) = Be^{-an^2\tau}\cdot\cos nx\ . \tag{6.6}$$

Используем теперь граничное условие (6.3). Так как $\frac{\partial t}{\partial x} = -Be^{-an^2\tau}n\sin nx$ , то из (6.3) и (6.6) получим

$$nR\sin nR = \frac{\alpha R}{\lambda}\cos nR\ . \tag{6.7}$$

Обозначим $nR = \mu$ .Выражение $\frac{\alpha R}{\lambda} = Bi$ называется критерием Био и является безразмерной величиной. Тогда из (6.7) следует, что

$$\mu\sin\mu = B\cos\mu$$

или

$$ctg\mu = \frac{\mu}{Bi}\ , \tag{6.8}$$

а это есть рассмотренное уже уравнение (5.1) при $B = Bi$. Оно называется характеристическим уравнением решаемой задачи, а его корни – собственными (характеристическими) числами. Было показано, что уравнение (6.8) имеет бесчисленное множество корней $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_K, ...$ Имеются таблицы нескольких первых корней в зависимости от значений $Bi$. Таким образом, корни уравнения (6.8) считаем неизвестными. Но так как их бесчисленное множество и

$$\mu_K = n_K R , \qquad (K = 1,2, ... ) , \qquad (6.9)$$

то и решений вида (6.6) имеется бесчисленное множество

$$t_K(x,\tau) = B_K e^{-\mu_K^2 \frac{a\tau}{R^2}} \cdot \cos \mu_K \frac{x}{R}, \qquad K = 1,2, ...$$

Как уже отмечалось в параграфе 2, сумма этих решений тоже является решением задачи. Тогда

$$t_K(x,\tau) = \sum_{K=1}^{\infty} B_K e^{-\mu_K^2 \frac{a\tau}{R^2}} \cdot \cos \mu_K \frac{x}{R}. \qquad (6.10)$$

Для вычисления $B_K$ используем условие (6.2), откуда следует, что

$$t_K(x,\tau) = \sum_{K=1}^{\infty} B_K \cdot \cos \mu_K \frac{x}{R}. \qquad (6.11)$$

Этот ряд совпадает с рядом (5.6), коэффициенты которого даны формулой (5.5) и имеют вид

$$B_K = \frac{2 t_{\text{н}} \sin \mu_K}{\mu_K + \sin \mu_K \cos \mu_K}. \qquad (6.12)$$

Подставив их в (6.10) и обозначив

$$A_K = \frac{2 \sin \mu_K}{\mu_K + \sin \mu_K \cos \mu_K}, \qquad (6.13)$$

получим решение задачи (6.1)…(6.4)

$$t(x,\tau) = t_{\text{н}} \sum_{K=1}^{\infty} A_K e^{-\mu_K^2 \frac{a\tau}{R^2}} \cdot \cos \mu_K \frac{x}{R}. \qquad (6.14)$$

Если $t_c \neq 0$ и постоянна, то сделав, как и в параграфе 1, подстановку и использовав те же обозначения, получим решение задачи в безразмерной форме

$$\theta = \frac{t(x,\tau) - t_c}{t_{\text{н}} - t_c} = \sum_{K=1}^{\infty} A_K e^{-\mu_K^2 F_0} \cdot \cos \mu_K \frac{x}{R}. \qquad (6.15)$$

Здесь $\mu_K$ и $A_K$ зависят от значений $Bi$ .

В таблице 6.1 приводятся значения $\mu_K$ и $A_K$ для ряда значений $Bi$ при $K = 1,2,3$.

Таблица 6.1

Значения корней уравнения $ctg\mu = \frac{\mu}{Bi}$ и коэффициентов $A_K$ ряда (6.15)

| $Bi$ | $\mu_1$ | $A_1$ | $\mu_2$ | $A_2$ | $\mu_3$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0000 | 1,0000 | 3,1416 | 0,0000 | 6,2832 | 0,0000 |
| 0,1 | 0,3111 | 1,0159 | 3,1731 | -0,0197 | 6,2991 | 0,0050 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 0,4328 | 1,0312 | 3,2039 | -0,0381 | 6,3148 | 0,0100 |
| 0,3 | 0,5218 | 1,0450 | 3,2341 | -0,0555 | 6,3305 | 0,0148 |
| 0,4 | 0,5932 | 1,0581 | 3,2636 | -0,0719 | 6,3461 | 0,0196 |
| 0,5 | 0,6533 | 1,0701 | 3,2923 | -0,0873 | 6,3616 | 0,0243 |
| 0,6 | 0,7051 | 1,0813 | 3,3204 | -0,1025 | 6,3770 | 0,0289 |
| 0,7 | 0,7506 | 1,0918 | 3,3477 | -0,1154 | 6,3923 | 0,0335 |
| 0,8 | 0,7910 | 1,1016 | 3,3744 | -0,1282 | 6,4074 | 0,0379 |
| 0,9 | 0,8274 | 1,1107 | 3,4003 | -0,1403 | 6,4224 | 0,0423 |
| 1,0 | 0,8603 | 1,1192 | 3,4256 | -0,1517 | 6,4373 | 0,0466 |
| 1,5 | 0,9882 | 1,1537 | 3,5422 | -0,2013 | 6,5097 | 0,0667 |
| 2,0 | 1,0769 | 1,1784 | 3,6436 | -0,2367 | 6,5783 | 0,0848 |
| 3,0 | 1,1925 | 1,2102 | 3,8088 | -0,2881 | 6,7040 | 0,1154 |
| 4,0 | 1,2646 | 1,2287 | 3,9352 | -0,3215 | 6,8140 | 0,1396 |
| 5,0 | 1,3138 | 1,2403 | 4,0336 | -0,3442 | 6,9096 | 0,1588 |
| 6,0 | 1,3496 | 1,2478 | 4,1116 | -0,3604 | 6,9924 | 0,1740 |
| 8,0 | 1,3978 | 1,2569 | 4,2264 | -0,3812 | 7,1263 | 0,1959 |
| 10,0 | 1,4289 | 1,2612 | 4,3058 | -0,3934 | 7,2281 | 0,2104 |
| 100,1 | 1,5552 | 1,2731 | 4,6658 | -0,4239 | 7,7764 | 0,2539 |
| ∞ | 1,5708 | 1,2732 | 4,7124 | -0,4244 | 7,8540 | 0,2546 |

Так как $\mu_K$ и $A_K$ зависят от $Bi$, то $\theta = f(F_0, \frac{x}{R}, Bi)$ так что нельзя составить одну номограмму для всех случаев, как это было сделано в параграфе 3, где $\theta = f(F_0, \frac{x}{R})$. В практических задачах обычно интересно знать температуру поверхности $(x = R)$ и температуру центра $(x = 0)$. Именно для этих случаев и составлены номограммы, которые мы приводим на рис. 1 и 2.

Насколько быстро сходится ряд (6.15), зависит теперь не только от значений $F_0$, но и от значений $Bi$ (от значений $\frac{x}{R}$ сходимость ряда зависит меньше, так как $\left|\cos\mu_K \frac{x}{R}\right| \le 1$). Так, если $Bi \to \infty$, температура поверхности становится равной температуре среды и граничное условие третьего рода переходит в условие первого рода. Это означает, что при большом значении *α*, а следовательно, и $Bi$, когда $Bi \ge 100$, для вычисления *е*можно пользоваться формулой (3.3).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

Вычислить относительную температуру поверхности $(x = R)$, если $Bi = 3$, $F_0 = 0{,}7$.

Значения $A_K$ и $\mu_K$ берем из таблицы 6.1. Тогда

$e^{-\mu_1^2 F_0} = e^{-1{,}1925^2 \cdot 0{,}7} = 0{,}3696$, $\quad e^{-\mu_2^2 F_0} = e^{-3{,}8088^2 \cdot 0{,}7} = 0{,}00004$.

Так как второе слагаемое мало по сравнению с первым, ограничимся одним членом ряда

$$\theta = A_1 e^{-\mu_1^2 F_0} \cdot \cos \mu_1 \frac{x}{R} = 1{,}2102 e^{-1{,}1925^2 \cdot 0{,}7} \cdot \cos 1{,}1925 = 0{,}1652 .$$

Пример 2.

Вычислить относительную температуру центра пластины $(x = 0)$, если $Bi = 3$, $F_0 = 0{,}3$.

Тогда $e^{-\mu_1^2 F_0} = e^{-1{,}1925^2 \cdot 0{,}3} = 0{,}6527$,

$$e^{-\mu_2^2 F_0} = e^{-3{,}8088^2 \cdot 0{,}3} = 0{,}0129 ,$$

$$e^{-\mu_3^2 F_0} = e^{-6{,}704^2 \cdot 0{,}3} < 0{,}000002 .$$

Здесь возьмем два члена ряда

$$\theta = 1{,}2102 \cdot 0{,}6527 + 0{,}2881 \cdot 0{,}0129 = 0{,}797 .$$

Для следующего примера используем номограммы, приведенные на рис. 6.1 и 6.2.

Пример 3.

Определить температуру поверхности $t_п$ и температуру центра $t_ц$ пластины через 10 часов после начала охлаждения, если $R = 0{,}1 м$, $a = 0{,}0005 м^2/ч$, $t_н = 40°C$, $t_c = 5°C$, $\alpha = 8\, Bm/(м^2 \cdot K)$, $\lambda = 0{,}4\, Bm/(м^2 \cdot K)$.

$F_0 = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0{,}0005 \cdot 10}{0{,}01} = 0{,}5$; $\quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = 2$.

На рис. 6.1 на кривой для $Bi = 2$ находим точку $A$с абсциссой $F_0 = 0{,}5$. Ее ордината $\theta \approx 0{,}30$; $\frac{t_п - 5}{40 - 5} = 0{,}30$. Отсюда $t_п = 15°C$.

На рис. 6.1 таким же образом находим точку $B$ .Ее ордината $\theta = 0{,}65$; $\frac{t_ц - 5}{40 - 5} = 0{,}65$, тогда $t_ц = 28°C$.

Найдем среднеобъемную температуру пластины

$$\bar{\theta}(\tau) = \frac{1}{R} \int_0^R \theta(x, \tau) dx . \qquad (6.16)$$

Подставляя сюда $\theta(x,\tau)$ из (6.15) и интегрируя ряд почленно, получим

$$\bar{\theta}(\tau)=\frac{\bar{t}(\tau)-t_c}{t_{\text{н}}-t_c}=\sum_{K=1}^{\infty}B_K e^{-\mu_K^2 F_0}, \tag{6.17}$$

где $B_K = A_K \dfrac{\sin\mu_K}{\mu_K}$.

В таблице 6.2 приведены значения первых трех коэффициентов $B_K$ для некоторых значений $Bi$ .Значения $\mu_K$ были уже даны в табл. 6.1

Таблица 6.2

Значение коэффициентов $B_K$

| $Bi$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| 0,1 | 1,0000 | 0,0002 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,9995 | 0,0007 | 0,0000 |
| 0,3 | 0,9982 | 0,0016 | 0,0001 |
| 0,4 | 0,9973 | 0,0027 | 0,0002 |
| 0,5 | 0,9955 | 0,0040 | 0,0003 |
| 0,6 | 0,9939 | 0,0054 | 0,0004 |
| 0,7 | 0,9920 | 0,0070 | 0,0006 |
| 0,8 | 0,9903 | 0,0088 | 0,0007 |
| 0,9 | 0,9882 | 0,0105 | 0,0009 |
| 1,0 | 0,9862 | 0,0124 | 0,0011 |
| 1,5 | 0,9749 | 0,0220 | 0,0023 |
| 2,0 | 0,9635 | 0,0313 | 0,0037 |
| 5,0 | 0,9130 | 0,0664 | 0,0135 |
| 10,0 | 0,8743 | 0,0839 | 0,0236 |
| $\infty$ | 0,8106 | 0,0901 | 0,0324 |

Пример 4.

Определить количество теплоты, которое теряется 1 м$^3$ пластины при охлаждении в течение 10 часов, если $R=0{,}1\,м$, $t_н=40°C$, $t_c=5°C$, $\rho=1000\,кг/м^3$, $c=0{,}8\,ккал/(кг\cdot K)=0{,}8\cdot 4{,}1868\cdot 10^3\,Дж/(кг\cdot K)$, $\alpha=8\,ккал/(м^2\cdot ч\cdot K)=8\cdot 1{,}163\,Вт/(м^2\cdot K)$, $\lambda=0{,}4\,ккал/(м\cdot ч\cdot K)=0{,}4\cdot 1{,}163\,Вт/(м\cdot K)$.

Отсюда

$$a=\frac{\lambda}{c\rho}=\frac{0{,}4\cdot 1{,}163\cdot 3600}{0{,}8\cdot 4{,}1868\cdot 10^6}=0{,}5\,\frac{\text{м}^2}{\text{ч}};$$

$F_0 = \frac{a\tau}{R^2} = \frac{0{,}0005 \cdot 10}{0{,}01} = 0{,}5$ ; $\qquad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{8 \cdot 0{,}1}{0{,}4} = 2$ .

Так как значение $F_0$ достаточно большое, то в ряде (6.17) можно взять один член ряда. Из таблицы 6.2 для $Bi = 2$ $B_i = 0{,}9635$, а из таблицы 6.2 $\mu_1 = 1{,}0769$.

Тогда $\theta = 0{,}9635 e^{-1{,}0769^2 \cdot 0{,}5} = 0{,}5416$ ; $\frac{\bar{t}-5}{40-5} = 0{,}5416$ ; $\bar{t} = 24°C$ .

По формуле (3.8) количество теплоты

$$Q_v = c\rho v(t_н - \bar{t}) = 0{,}8 \cdot 4{,}1868 \cdot 10^3 \cdot 1000(40 - 24) = 53{,}5 \cdot 10^6 Дж = 12{,}8 \cdot 10^3 \text{ ккал.}$$

Ниже приводятсяварианты индивидуальных заданий, которые выполняются студентами по материалу, изложенному в настоящем параграфе.

Задание.

Пластина толщиной $2R$ с начальной температурой $t_н$ охлаждается в среде с температурой $t_c$. Вычислить температуру поверхности $t_п$ и температуру центра $t_ц$ черезвремя $\tau$ после начала охлаждения, а также количество теплоты, выделенное при этом объемом V.

Для вычисления $t_п$ и $t_ц$ воспользоваться: 1) аналитическим решением (6.15), 2) номограммами на рис. 6.1 и 6.2.

При этом значения части исходных данных общие для всех вариантов:

$\alpha = 8 ккал/(м^2 \cdot ч \cdot К) = 8 \cdot 1{,}163 Вт/(м^2 \cdot К)$,

$\lambda = 0{,}4 ккал/(м \cdot ч \cdot К) = 0{,}4 \cdot 1{,}163 Вт/(м \cdot К)$,

$c = 0{,}8 ккал/(кг \cdot К) = 0{,}8 \cdot 4{,}1868 \cdot 10^3\ Дж/(кг \cdot К)$,

$a = 0{,}0005 м^2/ч$ , $t_н = 35°C$ , $t_c = 0°C$ , $\rho = 1000 кг/м^3$ , $V = 1 м^3$.

Далее для различных вариантов приводятся значения $\tau$ и $R$.

1.$\tau = 1ч$ , $R = 0{,}01м$ ; 2.$\tau = 1ч$ , $R = 0{,}015м$ ;

3.$\tau = 1ч$ , $R = 0{,}02м$ ; 4.$\tau = 1ч$ , $R = 0{,}025м$ ;

5.$\tau = 1ч$ , $R = 0{,}03м$ ; 6.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}025м$ ;

7.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}03м$ ; 8.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}035м$ ;

9.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}04м$ ; 10.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}045м$ ;

11.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}05м$ ; 12.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}075м$ ;

13.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}1м$ ; 14.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}15м$ ;

15.$\tau = 5ч$ , $R = 0{,}2м$ ; 16.$\tau = 10ч$ , $R = 0{,}025м$ ;

17.$\tau = 10ч$ , $R = 0{,}03м$ ; 18.$\tau = 10ч$ , $R = 0{,}035м$ ;

19.$\tau = 10ч$ , $R = 0{,}04м$ ; 20.$\tau = 10ч$ , $R = 0{,}045м$ ;

$21.\tau = 10ч$ , $R = 0{,}05м$ ; $22.\tau = 10ч$ , $R = 0{,}075м$ ;

$23.\tau = 10ч$ , $R = 0{,}1м$ ; $24.\tau = 10ч$ , $R = 0{,}15м$ ;

$25.\tau = 10ч$ , $R = 0{,}2м$.

Значения $\mu_K$ и $A_K$ из (6.15) для соответствующих значений даны в таблице 6.1, а значения $B_K$ из (6.17) – в таблице 6.2.

## 7. ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ШАРА И БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

Пусть шар радиусом *R*или бесконечно длинный цилиндр радиусом *R*с постоянной температурой $t_н$ охлаждается в среде с постоянной температурой $t_c$ при условии, что на поверхности тела происходит конвективный теплообмен (задача симметричная).

Требуется найти температуру $t(r,\tau)$ в любой точке *r*через время $\tau$ после начала охлаждения.

Можно показать, что решая задачу тем же методом, который использовался для случая бесконечной пластины, решения задачи получим следующие.

Для шара

$$\theta = \frac{t(r,\tau)-t_c}{t_н-t_c} = \sum_{K=1}^{\infty} A_K \frac{R\sin\mu_K\frac{r}{R}}{r\mu_K} \cdot e^{-\mu_K^2 F_0}, \qquad (7.1)$$

где $\mu_K$ – корни характеристического уравнения

$$tg\mu = -\frac{\mu}{Bi-1}, \qquad (7.2)$$

а коэффициенты $A_K$ зависят от $\mu_K$.

Значения $\mu_K$ и $A_K$ при $K = 1,2,3$ для некоторых значений приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Значения корней уравнения (7.2) и коэффициентов $A_K$ из (7.1)

| $Bi$ | $\mu_1$ | $A_1$ | $\mu_2$ | $A_2$ | $\mu_3$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,5423 | 1,0297 | 4,5157 | -0,0454 | 7,7382 | 0,0260 |
| 0,2 | 0,7593 | 1,0592 | 4,5379 | -0,0894 | 7,7511 | 0,0520 |
| 0,3 | 0,9208 | 1,0880 | 4,5601 | -0,1345 | 7,7641 | 0,0779 |
| 0,4 | 1,0528 | 1,1164 | 4,5822 | -0,1781 | 7,7770 | 0,1036 |
| 0,5 | 1,1656 | 1,1440 | 4,6042 | -0,2216 | 7,7899 | 0,1292 |
| 0,6 | 1,2644 | 1,1713 | 4,6261 | -0,2633 | 7,8028 | 0,1541 |
| 0,7 | 1,3525 | 1,1978 | 4,6479 | -0,3048 | 7,8156 | 0,1799 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,8 | 1,4320 | 1,2237 | 4,6696 | -0,3455 | 7,8284 | 0,2050 |
| 0,9 | 1,5044 | 1,2488 | 4,6911 | -0,3854 | 7,8412 | 0,2299 |
| 1,0 | 1,5708 | 1,2732 | 4,7124 | -0,4244 | 7,8540 | 0,2546 |
| 1,5 | 1,8366 | 1,3848 | 4,8158 | -0,6067 | 7,9171 | 0,3752 |
| 2,0 | 2,0288 | 1,4793 | 4,9132 | -0,7673 | 7,9787 | 0,4899 |
| 5,0 | 2,5704 | 1,7870 | 5,3540 | -1,3733 | 8,3029 | 1,0363 |
| 10,0 | 2,8363 | 1,9249 | 5,7172 | -1,7381 | 8,6587 | 1,5141 |
| ∞ | 3,1416 | 2,0000 | 6,2832 | -2,0000 | 9,4248 | 2,0000 |

Для цилиндра

$$\theta = \frac{t(r,\tau)-t_c}{t_н-t_c} = \sum_{K=1}^{\infty} A_K e^{-\mu_K^2 F_0} \cdot J_0\left(\mu_K \frac{r}{R}\right), \quad (7.3)$$

где $\mu_K$ – корни характеристического уравнения

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi}, \quad (7.4)$$

а коэффициенты $A_K$ в (7.3) зависят от $\mu_K$ . Их значения при $K = 1,2,3$ для ряда значений Biприводятся в таблице 7.2.

Таблицы значений функций Бесселя $J_0(\mu)$ и $J_1(\mu)$ имеются в различных справочниках, например, в [5,6].

Таблица 7.2

Значения корней уравнения (7.4) и коэффициентов $A_K$ из (7.3)

| *Bi* | $\mu_1$ | $A_1$ | $\mu_2$ | $A_2$ | $\mu_3$ | $A_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,1 | 0,4417 | 1,0245 | 3,8577 | -0,0333 | 7,0298 | 0,0135 |
| 0,2 | 0,6170 | 1,0482 | 3,8835 | -0,0653 | 7,0440 | 0,0269 |
| 0,3 | 0,7465 | 1,0711 | 3,9091 | -0,0972 | 7,0582 | 0,0401 |
| 0,4 | 0,8516 | 1,0931 | 3,9344 | -0,1277 | 7,0723 | 0,0582 |
| 0,5 | 0,9408 | 1,1142 | 3,9594 | -0,1571 | 7,0864 | 0,0662 |
| 0,6 | 1,0184 | 1,1345 | 3,9841 | -0,1857 | 7,1004 | 0,0790 |
| 0,7 | 1,0873 | 1,1539 | 4,0085 | -0,2132 | 7,1143 | 0,0917 |
| 0,8 | 1,1490 | 1,1724 | 4,0325 | -0,2398 | 7,1282 | 0,1043 |
| 0,9 | 1,2048 | 1,1902 | 4,0562 | -0,2654 | 7,1421 | 0,1167 |
| 1,0 | 1,2558 | 1,2071 | 4,0795 | -0,2901 | 7,1558 | 0,1289 |
| 1,5 | 1,4569 | 1,2807 | 4,1902 | -0,4008 | 7,2233 | 0,1877 |
| 2,0 | 1,5994 | 1,3377 | 4,2910 | -0,4923 | 7,2884 | 0,2422 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,0 | 1,9898 | 1,5029 | 4,7131 | -0,7973 | 7,6177 | 0,4842 |
| 10,0 | 2,1795 | 1,5677 | 5,0332 | -0,9575 | 7,9569 | 0,6784 |
| $\infty$ | 2,4048 | 1,6021 | 5,5201 | -1,0648 | 8,6537 | 0,8588 |

На рис. 7.1…7.4 даны графики зависимостей относительной температуры поверхности $\theta_П$ и относительной температуры центра $\theta_ц$ от $F_0$ для различных значений $Bi$.

Задание.

Шар и цилиндр радиусом $R$с начальной температурой $t_н$ охлаждаются в среде с температурой $t_c$. Вычислить температуру поверхности $t_П$ и температуру центра $t_ц$ через $\tau$ часов после начала охлаждения. Для вычисления $t_П$ и $t_ц$ воспользоваться: 1) аналитическими решениями (7.1) и (7.3); 2) номограммами на рис. 7.1…7.4. При этом взять следующие значения исходных данных:

$\alpha = 8 ккал/(м^2 \cdot ч \cdot К) = 8 \cdot 1{,}163 Вт/(м^2 \cdot К)$,

$\lambda = 0{,}4 ккал/(м \cdot ч \cdot К) = 0{,}4 \cdot 1{,}163 Вт/(м \cdot К)$,

$c = 0{,}8 ккал/(кг \cdot К) = 0{,}8 \cdot 4{,}1868 \cdot 10^3\ Дж/(кг \cdot К)$,

$a = 0{,}0005 м^2/ч$, $t_н = 35°C$, $t_c = 0°C$.

Значения $\tau$ и $R$:

1. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}01м$; 2. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}015м$;

3. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}02м$; 4. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}025м$;

5. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}03м$; 6. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}035м$;

7. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}04м$; 8. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}045м$;

9. $\tau = 1ч$, $R = 0{,}05м$; 10. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}02м$;

11. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}025м$; 12. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}03м$;

13. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}035м$; 14. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}04м$;

15. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}045м$; 16. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}05м$;

17. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}075м$; 18. $\tau = 2ч$, $R = 0{,}1м$;

19. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}03м$; 20. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}035м$;

21. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}04м$; 22. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}045м$;

23. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}05м$; 24. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}17м$;

25. $\tau = 3ч$, $R = 0{,}1м$.