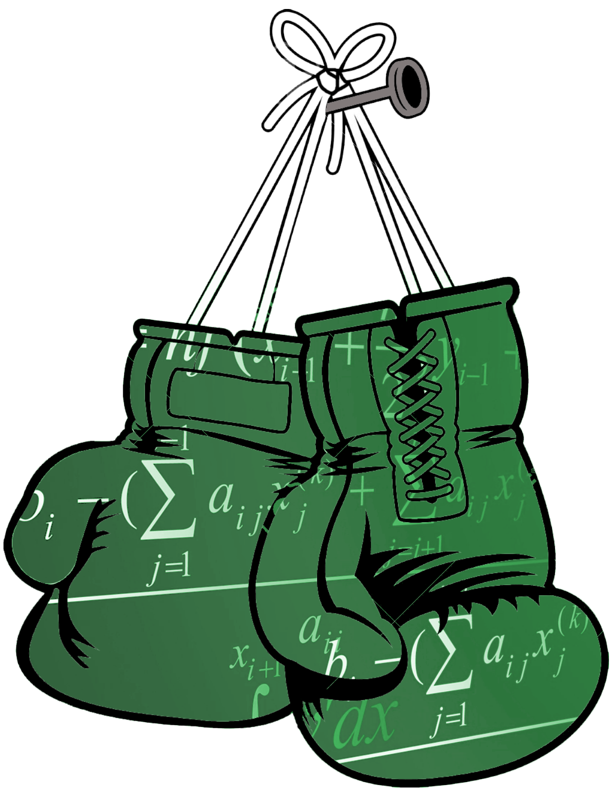
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

# СТУДЕНЧЕСКИЙ ТУРНИР «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БОИ — 2017»



Санкт-Петербург

2017

**Министерство образования и науки Российской Федерации**
**Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики**
**(Университет ИТМО)**

# СТУДЕНЧЕСКИЙ ТУРНИР «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БОИ — 2017»

**Санкт-Петербург**
**2017**

Турнир «Математические бои — 2017» проводился кафедрой высшей математики в период с 9 декабря 2017 г. по 21 апреля 2018 г. К участию в турнире приглашались команды из 6 человек любых специальностей и курсов Университета ИТМО. Участвовало 11 команд.

Математический бой – соревнование двух команд в решении математических задач. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение (1 час 30 минут). По истечении отведенного времени начинается собственно бой, когда команды рассказывают друг другу решения задач в соответствии с данными правилами. Если одна из команд рассказывает решение, то другая выступает в качестве оппонента, то есть, ищет в нем ошибки (недочеты). Выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах. Если команды, обсудив предложенное решение, всё-таки не решили задачу до конца или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все) может забрать себе жюри боя. Победителем боя объявляется команда, которая в итоге наберёт большее количество баллов. Победившая команда проходит в следующий тур, а проигравшая - выбывает из соревнований.

Председатель жюри: проф., д.ф.-м.н. Попов И. Ю.

Оргкомитет турнира: асс. Бабушкин М. В., доц., к.ф.-м.н. Рыжков А. Е., доц., к.ф.-м.н. Норин А. В., зам. начальника ДНИР Студеникин Л. М., начальник ДОД Щербакова И. Ю.

Составители: проф. Попов И. Ю., доц. Блинова И. В., доц. Попов А. И., доц. Трифанова Е. С., асс. Бабушкин М. В.

## Правила турнира «Математические бои — 2017»

### Общая схема боя

Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказа от вызова – см. пункт "Окончание боя") одна из команд вызывает другую на одну из задач, решение которой еще не рассказывалось (например: "Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8"). После этого, вызванная команда сообщает, принимает ли она вызов, то есть, согласна ли она рассказывать решение этой задачи (на решение о принятии вызова отводится не более одной минуты). Если команда принимает вызов, то она выставляет докладчика, который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет оппонента, обязанность которого - искать ошибки в представленном решении. Если вызов не принят, то команда, которая вызывала, обязана выставить докладчика, а команда, отклонившая вызов, выставляет оппонента. В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова.

### Конкурс капитанов

Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное – победил его соперник. При этом что понимается под "правильным решением": просто верный ответ, ответ с объяснением и т. п. - жюри уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в какую-либо игру. Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

Команда имеет право выставить на конкурс капитанов любого члена команды.

### Ход раунда

**Доклад.** В начале раунда докладчик рассказывает решение у доски. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничено 15 минутами, по истечении которых доклад может быть продолжен только с разрешения жюри.

Докладчик может иметь при себе бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями, но не имеет права брать с собой текст решения.

**Докладчик имеет право:**

- до начала выступления вынести на доску всю необходимую ему информацию;

- не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения; - просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: "Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?");

- отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: а) он не имеет ответа на этот вопрос; б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями б) и в) арбитром в споре выступает жюри.

**Докладчик не обязан:**

- излагать способ получения ответа, если он может доказать его правильность и полноту;

- сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

**Оппонирование.** Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право попросить повторить часть решения. Он может разрешить докладчику не доказывать какие-либо очевидные факты (со своей точки зрения). После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что вопросов у него нет. Если докладчик не начинает отвечать на вопрос в течение минуты, то считается, что у него нет ответа.

**В качестве вопроса оппонент может:**

- потребовать повторить любую часть доклада;

- попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: а) попросить дать определение любого термина ("Что Вы понимаете под ..."); б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения ("Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ... ");

- попросить доказать сформулированное докладчиком утверждение, если оно не является очевидным или общеизвестным (в спорных случаях, вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, включенные в общеобразовательную программу по математике);

- после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

**Докладчик и оппонент обязаны:**

- высказываться в вежливой и корректной форме, обращаясь к друг другу на "Вы";

- критикуя высказывания друг друга не "переходить на личности";

- повторять и уточнять свои вопросы и ответы по просьбе друг друга или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: а) признать решение правильным; б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и (или) пробелы с обязательным их указанием; в) признать решение (ответ) неправильным, указав ошибки в обоснованиях ключевых утверждений доклада, или приведя контрпример, или указав существенные пробелы в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, то он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как "Можно ли ...? "Верно ли, что ...?"и т. п.), то оппонент имеет право заявить: "Я с решением не согласен, у меня есть контрпример но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (жюри имеет право потребовать предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права изменять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить "Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи не указывая докладчику, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контр примером.

**Участие жюри в обсуждении.** После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости, оно имеет право вмешаться и ранее, во время диалога докладчика и оппонента.

**Выступающие и команда.** Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники также могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более шести полуминутных перерывов (см. пункт "Количество выходов к доске").

**Перемена ролей.** Перемена ролей в раунде может произойти только в том случае, если вызов в этом раунде был принят. Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (так ли это, решает жюри, см. пункт "Начисление баллов") то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит полная перемена ролей, то есть, бывший докладчик становится оппонентом. Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то он получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков ("залатать дыры"). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика решения нет, но собственное решение рассказывать отказался. Если оппонент взялся "латать дыры то происходит частичная перемена ролей: оппонент формулирует, что именно он собирается делать (например: разбирать случай, не разобранный докладчиком; доказывать утверждение, недоказанное докладчиком; и т. п.), а бывший докладчик ему оппонирует.

Обратной перемены ролей не происходит ни в каком случае!

**Корректность вызова.** Если вызов принят, то вопрос о его корректности не ставится, то есть, принятый вызов всегда считается корректным!

**Если вызов не принят, то возможны два случая:**

а) вызывавшая команда также отказалась отвечать, и тогда, вызов "автоматически"признается некорректным;

б) вызывавшая команда выставила докладчика, тогда корректность вызова зависит от дальнейшего хода раунда, а именно, вызов признается некорректным, если оппоненту удается доказать, что задача не решена. В случае, если оппонент признал задачу решенной, вызов "автоматически"признается корректным!

**Количество выходов к доске**

Каждый член команды имеет право выйти к доске один раз в качестве докладчика и один раз в качестве оппонента. Команда имеет право не более трех раз за бой заменять докладчика или оппонента, причем в каждом таком случае выход засчитывается обоим членам команды. При каждой замене, время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на одну минуту (эту минуту можно как использовать непосредственно перед заменой, так и не использовать. В последнем случае команда соперников тоже не имеет права ее использовать).

**Порядок вызовов. Окончание боя**

В случае, если вызов был признан некорректным, команда должна в следующем раунде повторить вызов. Во всех остальных случаях команды вызывают друг друга поочередно.

В любой момент боя та команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, а делать вызов, который может оказаться некорректным, она не рискует). Тогда, другая команда получает право (но не обязана) рассказать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей). Бой заканчивается, когда все задачи обсуждены или когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

**Начисление баллов**

Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если оппонент сумел найти в решении более или менее существенные ошибки, жюри прежде всего решает вопрос о том, удалось ли оппоненту доказать, что задача докладчиком не решена. Если это оппоненту не удалось, то он, тем не менее, может получить баллы за оппонирование в зависимости от серьезности указанных недочетов и от того, насколько докладчику (или оппоненту, если произошла частичная перемена ролей) удалось их исправить. Как правило, оппонент получает половину "стоимости"не "залатанных"докладчиком "дыр"в решении (принцип "половины"), но, если докладчик сумел изложить полное решение только после существенных наводящих вопросов оппонента и (или) жюри ("грязь"в решении), то жюри может отобрать у докладчика не более двух баллов и передать их оппоненту или оставить себе. Если же произошла частичная перемена ролей, то бывший оппонент получает дополнительно баллы за доказательство сформулированных им предварительно утверждений, а бывший докладчик - за их оппонирование (при этом "стоимость"рассматриваемых утверждений определяет жюри, а распределение баллов происходит так же, как при оппонировании полного решения – с учетом принципа "половины"и "грязи"в рассуждениях). Остальные баллы распределяются между докладчиком и жюри, и раунд заканчивается. Если же оппонент сумел доказать, что решения у докладчика нет, он получает баллы за оппонирование (с учетом принципа "половины") и, если вызов был принят, право рассказать свое решение (см. пункт "Перемена ролей"). Если при этом происходит полная или частичная перемена ролей, то начисление баллов происходит по схеме, изложенной выше.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он нашел эти недостатки сам. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае состоит из одной фразы: "У Вас нет решения"), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

В случае проверки корректности вызова и признания его некорректным команда, проверявшая корректность, получает 6 баллов (даже если решение задачи вообще не обсуждалось). За оппонирование команда получает не более 6 баллов.

**Капитан**

Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т. д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала боя.

Во время решения задач главная обязанность капитана - координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан с учетом пожеланий членов команды распределяет между ними задачи для решения, следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче, определяет тактику команды на предстоящем бое.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении в ходе боя перерывов на 5-10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между раундами. При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

**Жюри**

Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет на доске протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием председателя жюри. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски. Жюри обязано мотивировать все свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

## Список команд–участников турнира

**1. Департамент анализа данных**

Капитан: Морозов Владимир.

Члены команды: Рыбкин Никита, Кетов Артём, Садовников Александр, Кравченко Александр, Аганов Артур, Кабанова Екатерина.

**2. BananaBoys**

Капитан: Бойцов Виталий.

Члены команды: Газыев Тимур, Егоров Николай, Гольняк Никита, Калибров Илья, Кузьминов Игорь.

**3. BAC**

Капитан: Черепанов Андрей.

Члены команды: Куренков Андрей, Лебедева Екатерина, Тимофеев Данил, Шумков Алексей, Луганский Александр.

**4. Команда имени Рамзана Кадырова**

Капитан: Кофтина Виктория.

Члены команды: Бороев Тумэн, Назаров Денис, Прохоров Артём, Исмагилов Дамир, Горохов Никита.

**5. Твтви**

Капитан: Ларочкин Глеб.

Члены команды: Иван Лысенко, Анна Базарова, Кирилл Кольцов, Денис Рожнов, Марина Калугина.

**6. Novorse**

Капитан: Сулимов Владимир.

Члены команды: Стовбун Глеб, Русаков Артём, Файзуллин Владислав, Лебедев Сергей, Дьяков Владислав.

**7. Многообразие**

Капитан: Любаров Марк.

Члены команды: Виролайнен Константин, Волков Илья, Баглай Михаил, Ахметзянов Шаукат, Шульгин Антон, Нирад Нандан.

**8. Тютельки**

Капитан: Ченцов Андрей.

Члены команды: Данилова Валентина, Кривопальцев Дмитрий, Лундин Максим, Плетнева Мария, Чулков Кирилл.

**9. Solid Snake**

Капитан: Исрапилов Махач.

Члены команды: Кузнецов Егор, Бирючевский Эдуард, Иванов Егор, Кузьменко Наталья, Исрафилов Данил.

**10. Осаго**

Капитан: Чеботарев Алексей.

Члены команды: Воробьёв Кирилл, Пукалов Степан, Тимофеевский Георгий, Хусейнов Артур, Михеева Полина.

**11. Мнимая единица**

Капитан: Катасонов Владислав.

Члены команды: Горохова Надежда, Лукашевич Антон, Никитин Иван, Утусиков Олег.

## Результаты и ход турнира

Первое место: «Департамент анализа данных»
Второе место: «Мнимая единица»
Третье место: «ВАС», «Команда имени Рамзана Кадырова»


* — техническое поражение

## Отборочный тур. «Твтви» VS «Novorse»

Условия задач

**1.** Можно ли в таблице $3 \times 3$ так расставить числа $3, 4, 5, \ldots, 11$, чтобы произведение чисел первой строки было равно произведению чисел первого столбца, произведение чисел второй строки было равно произведению чисел второго столбца, и, наконец, произведение чисел третьей строки было равно произведению чисел третьего столбца?

**2.** Для параболы, заданной уравнением $y^2 = 2mx$, определить наименьшую длину хорды, перпендикулярной ей в одном из концов.

**3.** Вычислить определитель матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$, если

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{если } i \neq j, \\ 2, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

**4.** Дана окружность радиуса $R$ с центром $O$. Две другие окружности касаются данной изнутри и пересекаются в точках $A$ и $B$. Найти сумму радиусов двух последних окружностей, если $\angle OAB = 90^\circ$.

**5.** Найти все функции $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

при всех $x \neq \pm 1$.

**6.** Для некоторого числа $a > 0$ известно, что $\lg[a] + \lg\{a\} = 2$, где $[a]$ — целая, а $\{a\}$ — дробная часть $a$. Докажите, что $\lg\left[a^2\right] + \lg\left\{a^2\right\} > 4$.

Результаты боя

| № задачи | Твтви | | Novorse | Жюри |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | $\rightleftarrows$ | 2 | 0 |
| 3 | 12 | $\leftarrow$ | 0 | 0 |
| 6 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 2 | 9 | $\leftarrow$ | 0 | 3 |
| 1 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 5 | 0 | | 0 | 12 |
| **Итог:** | **31** | | **26** | |

Решения

**1.** Таблица

$$\begin{matrix} 11 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 10 & 4 & 9 \end{matrix}$$

даёт пример такого расположения. $\square$

**2.** Координаты точек параболы имеют вид $(2mt^2, 2mt)$. Пусть $AB$ — хорда параболы, перпендикулярная ей в точке $A$, тогда для некоторых вещественных значений $t$ и $s$ будет $A = (2mt^2, 2mt)$, $B = (2ms^2, 2ms)$. Угловой коэффициент прямой $AB$ равен $1/(s+t)$, а для касательной к параболе в точке $A$ его значение $1/(2t)$. Поскольку эта касательная перпендикулярна прямой $AB$, то должно выполняться соотношение

$$s + t = -\frac{1}{2t}.$$

Пусть $l$ — длина хорды $AB$, тогда

$$l^2 = 4m^2\left((s^2 - t^2)^2 + (s-t)^2\right) = 4m^2(s-t)^2\left((s+t)^2 + 1\right).$$

Подставляя $s = -t - 1/(2t)$, получаем

$$l^2 = 4m^2\left(\frac{4t^2+1}{2t}\right)^2\frac{1+4t^2}{4t^2} = \frac{m^2}{4}\frac{(4t^2+1)^3}{t^4}.$$

Величина $l$ будет минимальна, если будет минимальным значение выражения

$$\frac{4t^2+1}{t^{4/3}} = 4t^{2/3} + t^{-4/3}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим две критические точки, $t = \pm\sqrt{2}/2$. Поскольку $L \to \infty$ при $t \to 0, \pm\infty$, то в них достигается минимум длины хорды, равный $3\sqrt{3}|m|$. $\square$

**3.** Значение определителя не изменится, если прибавить вторую строку к первой, третью строку ко второй, ..., $n$-ую строку к $(n-1)$-ой. Имеем

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & +1 & \dots & \pm1 & \mp1 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \mp1 & \pm1 \\ +1 & -1 & 2 & \dots & \pm1 & \mp1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mp1 & \pm1 & \mp1 & \dots & 2 & -1 \\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \pm1 & \mp1 & \pm1 & \mp1 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем первый столбец из второго, затем результат вычтем из третьего и т. д. Таким образом, получаем

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \pm1 & \mp2 & \pm3 & \dots & -n+1 & n+1 \end{vmatrix} = n + 1.$$

Ответ: $\det(A) = n + 1$. $\square$

**4.** Пусть $O_1$ и $O_2$ — центры пересекающихся окружностей. Обозначим их радиусы через $x$ и $y$, $|OA| = a$. Поскольку треугольники $AOO_1$ и $AOO_2$, как следует из условия, равновелики, то, выражая их площади по формуле Герона и учитывая, что $|O_1A| = x$, $|OO_1| = R - x$, $|O_2A| = y$, $|OO_2| = R - y$, получим после преобразований

$$(R - 2x)^2 = (R - 2y)^2.$$

Отсюда, поскольку $x \neq y$, получаем: $x + y = R$. $\square$

**5.** Функция $\varphi(t) = \frac{t-3}{t+1}$ обладает свойствами:

$$\varphi\left(\varphi(t)\right) = \frac{3+t}{1-t},$$
$$\varphi\left(\varphi\left(\varphi(t)\right)\right) = t.$$

Подставляя вместо $x$ в уравнении, данном в условии задачи, выражения $\varphi(x)$ и $\varphi\left(\varphi(x)\right)$, получаем систему линейных уравнений

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x,$$
$$f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) + f(x) = \frac{x-3}{x+1},$$
$$f(x) + f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{3+x}{1-x},$$

относительно неизвестных $f(x)$, $f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$, $f\left(\frac{3+x}{1-x}\right)$. Решая её, находим функцию

$$f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2},$$

являющуюся единственным решением исходного уравнения. $\square$

**6.** Из условия следует, что $[a]\{a\} = 100$. Найдём целую и дробную части числа $a^2$:

$$a^2 = ([a] + \{a\})^2 = [a]^2 + 2[a]\{a\} + \{a\}^2 = [a]^2 + \{a\}^2 + 200.$$

Поскольку $[a]^2 + 200$ — целое, и $0 \leqslant \{a\}^2 < 1$, то

$$\left[a^2\right] = [a]^2 + 200, \quad \left\{a^2\right\} = \{a\}^2.$$

Следовательно,

$$\lg\left(\left[a^2\right]\left\{a^2\right\}\right) = \lg\left(\left([a]^2 + 200\right)\{a\}^2\right) > \lg\left([a]\{a\}\right)^2 = 4,$$

что и требовалось. $\square$

## Отборочный тур. «Осаго» VS «Многообразие» VS «Мнимая единица»

Условия задач

**1.** Из точки на плоскости отложено $2n$ векторов единичной длины. Они покрашены поочерёдно в красный и зелёный цвет. Просуммируем все вектора каждого цвета. Докажите, что разность двух этих сумм имеет длину не больше 2.

**2.** Пусть функция $f$ дифференцируема на $[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Докажите, что для любого натурального $n$ найдутся различные точки $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0,1]$, такие что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)} = n.$$

**3.** Сколько существует способов расположить $n^2$ различных чисел в матрицу $(a_{ij})$ размера $n \times n$ так, чтобы $\max\limits_j \min\limits_i a_{ij} = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$?

**4.** Пусть $n$ — количество прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых отношение площади к полупериметру равно $p^m$, где $p$ простое, а $m$ натуральное число. Докажите, что

$$n = \begin{cases} m+1, & \text{если } p = 2, \\ 2m+1, & \text{если } p \neq 2. \end{cases}$$

**5.** Найдите все вещественные числа $t$, такие что для любых $x > y > 0$

$$(x-y)^t (x+y)^t = (x^t - y^t)^t (x^t + y^t)^{2-t}.$$

**6.** Пусть $D$ — круг без граничных точек, определяемый неравенством $x^2 + y^2 < 1$. Точка $A$ имеет координаты $(r, 0)$, где $0 < r < 1$. Опишите множество всех точек $P \in D$, таких что круг без границы с центром в середине $AP$ и радиусом $|AP|/2$ является подмножеством $D$.

**7.** Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$f\left((x-y)^2\right) = f(x)^2 - 2xf(y) + y^2.$$

**8.** Пусть $a, b > 0$, $A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix}$. Найдите такую матрицу $B$, что $B^8 = A$.

**9.** Существуют ли такие иррациональные числа $a$ и $b$, что $a > 1$, $b > 1$ и $[a^m]$ отлично от $[b^n]$ при любых натуральных $m$ и $n$?

Результаты боя

| № задачи | | A<br>Осаго | B<br>Многообразие | C<br>Мнимая единица | Жюри |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | A $\rightleftarrows$ B | 1 | 1 | 0 | 10 |
| 4 | B $\to$ C | 0 | 0 | 11 | 1 |
| 6 | C $\rightleftarrows$ A | 2 | 0 | 2 | 8 |
| 8 | A $\to$ B | 0 | 12 | 0 | 0 |
| 3 | B $\to$ C | 0 | 2 | 8 | 2 |
| 7 | C $\to$ A | 4 | 0 | 4 | 4 |
| **Итог:** | | **7** | **15** | **25** | |

Решения

**1.** Концы $A_i$ данных векторов лежат на окружности радиуса 1 с центром в точке $O$ (нумерация идёт по часовой стрелке). Нечётный номер соответствет красному цвету, а чётный — зелёному. Имеем

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \left(\overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_4} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}}\right) - \left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n-1}}\right) = \\ &= \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_4} - \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_{2n}} - \overrightarrow{OA_{2n-1}} = \\ &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{2n-1}A_{2n}}.\end{aligned}$$

Проведём через центр $O$ прямую, параллельную $\overrightarrow{x}$, и спроецируем на неё все слагаемые. Проекция вектора $\overrightarrow{x}$ на эту прямую будет совпадать с ним самим по абсолютной величине.

Все векторы $\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}$ разобьются на две группы: те, которые сонаправлены $\overrightarrow{x}$, и которые противонаправлены. Мы можем считать, что нумерация точек идёт от прямой по часовой стрелке. Тогда векторы одной группы — это $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_3A_4}$ и так далее до некоторого номера $k$. Вторая группа состоит из остальных векторов. Заметим, что в каждой группе проекции точек $A_i$ расположены на прямой в том же порядке, как и сами точки $A_i$ на окружности. Это значит, что сумма проекций равна проекции суммы.

В каждой группе эта сумма не больше диаметра окружности, т. е. лежит в пределах от 0 до 2. Это значит, что разность двух сумм не больше $2 - 0 = 2$ и не меньше $0 - 2 = -2$. $\square$

**2.** Положим $a_0 = 0$ и $a_n = 1$. Поскольку $f$ дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, то она непрерывна на нём. По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции для любого $k$, $1 < k \leqslant n$, найдётся $a_k$, такое что $a_{k-1} < a_k \leqslant 1$ и $f(a_k) = k/n$. По теореме Лагранжа существует число $x_k$, $a_{k-1} < x_k < a_k$, такое что

$$f'(x_k) = \frac{f(a_k) - f(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} = \frac{1}{n(a_k - a_{k-1})}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} n(a_k - a_{k-1}) = n(a_n - a_0) = n.$$

Все значения $x_k$ различны, поскольку $a_{k-1} < x_k < a_k$, а последовательность $a_k$ строго возрастает. $\square$

**3.** Если $\max\limits_j \min\limits_i a_{ij} = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij} = a_{\alpha\beta}$, то $a_{\alpha\beta}$ является наибольшим числом в строке с номером $\alpha$ и наименьшим числом в столбце с номером $\beta$, а значит

$$a_{\alpha j} < a_{\alpha\beta} < a_{i\beta} \quad \text{для всех } i \neq \alpha \text{ и всех } j \neq \beta. \tag{1}$$

Обратно, если (1) верно для некоторого числа $a_{\alpha\beta}$, то из соотношений $\min\limits_i a_{ij} \leqslant a_{\alpha j} < a_{\alpha\beta}$ для всех $j \neq \beta$, и $\max\limits_j a_{ij} \geqslant a_{i\beta} > a_{\alpha\beta}$ для всех $i \neq \alpha$ следует, что $\max\limits_j \min\limits_i a_{ij} = \min\limits_i \max\limits_j a_{ij}$.

Таким образом, наличие в матрице числа $a_{\alpha\beta}$, удовлетворяющего условию (1), является необходимым и достаточным условием для выполнения равенства

$$\max_j \min_i a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij}.$$

Для получения такой матрицы выберем любые $2n-1$ чисел из данных $n^2$, обозначим их $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1}$. Поместим $x_n$ в любую позицию в матрице. Затем в ту же строку поместим числа $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, и в тот же столбец числа $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}$. Остальные $n^2 - 2n + 1$ чисел разместим произвольным образом в оставшихся свободных позициях. Таким образом, всего существует

$$C_{n^2}^{2n-1} \cdot n^2 \cdot ((n-1)!)^2 \cdot (n^2 - 2n + 1)! = \frac{(n^2)!(n!)^2}{(2n-1)!}$$

способов сконструировать такую матрицу. $\square$

**4.** Пусть целые числа $x, y, z$ обозначают длины сторон треугольника. В условии задачи требуется выполнение равенств

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{и} \quad xy = p^m(x + y + z).$$

Исключая $z$ из этих уравнений, находим

$$(x - 2p^m)(y - 2p^m) = 2p^{2m}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что $2p^{2m}$ делится на $(x - 2p^m)$. Кроме того, $x - 2p^m > 0$. (Если $x - 2p^m = -p^j$ или $-2p^j$ при $0 \leqslant j \leqslant m$, то $y \leqslant 0$; если $x - 2p^m = -p^{m+j}$ или $-2p^{m+j}$ при $0 < j \leqslant m$, то $x \leqslant 0$.)

Если $p \neq 2$, то соотношения

$$x - 2p^m = p^s \quad \text{и} \quad y - 2p^m = 2p^{2m-s} \quad (0 \leqslant s \leqslant 2m)$$

дают $2m+1$ пар чисел $x$ и $y$, удовлетворяющих (2). Можно поменять ролями $x$ и $y$, но при этом мы не получаем новых треугольников.

В случае $p = 2$ уравнение (2) преобразуется к виду

$$(x - 2^{m+1})(y - 2^{m+1}) = 2^{2m+1}.$$

Значит $2^{2m+1}$ делится на $x - 2^{m+1}$, поэтому $x - 2^{m+1} = 2^j$, $y - 2^{m+1} = 2^{2m-j+1}$ при $0 \leqslant j \leqslant m$, то есть существует $m+1$ уникальных решений при $p = 2$. $\square$

**5.** Предположим, что $t \neq 0$. Перепишем данное уравнение в виде

$$(x^2 - y^2)^t (x^t + y^t)^t = (x^t - y^t)^t (x^t + y^t)^2$$

и разделим обе части на $x^{t^2+2t}$. Имеем

$$(1 - (y/x)^2)^t (1 + (y/x)^t)^t = (1 - (y/x)^t)^t (1 + (y/x)^t)^2.$$

Полагая $u = y/x$, получаем

$$(1 + u^t)^{t-2} = \left(\frac{1 - u^t}{1 - u^2}\right)^t$$

при $0 < u < 1$. Переходя к пределу при $u \to 1$ слева и используя правило Лопиталя, находим, что $2^{t-2} = (t/2)^t$ или $4^{1/t} t = 4$. Очевидно, что $t = 1$ и $t = 2$ являются решениями полученного уравнения. Докажем, что других решений нет. Действительно, положим

$$f(t) = 4^{1/t} t - 4.$$

Производная $f'(t) = 4^{1/t}\left(1 - \frac{\ln 4}{t}\right)$ обращается в ноль в точке $t = \ln 4$, являющейся единственной точкой экстремума (минимума). При этом $f(\ln 4) < 0$, $1 < \ln 4 < 2$. Отсюда следует, что функция $f$ имеет ровно два корня: $t = 1$ и $t = 2$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения удовлетворяют условию задачи. $\square$

**6.** Пусть $C$ — середина отрезка $AP$, $Q$ — точка пересечения окружности $x^2 + y^2 = 1$ и луча, выходящего из начала координат и проходящего через точку $C$. Если $P$ имеет координаты $(x, y)$, то

$$C = \left(\frac{x+r}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad Q = \left(\frac{x+r}{k}, \frac{y}{k}\right),$$

где $k = \sqrt{(x+r)^2 + y^2}$. Если длина отрезка $CQ$ не меньше, чем $|AP|/2$, то внутренность круга с центром в точке $C$ и радиуса $|AP|/2$ будет подмножеством $D$. Неравенство $|CQ| \geqslant |AP|/2$ сводится к неравенству

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - r^2} \leqslant 1. \tag{3}$$

Таким образом, точка $P$ должна лежать внутри или на границе эллипса, определяемого неравенством (3), за исключением двух его вершин $(\pm 1, 0)$, которые не принадлежат $D$. $\square$

**7.** При $y = 0$ получаем

$$f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(0),$$

а при $x = 0$

$$f(y^2) = f(0)^2 + y^2.$$

Полагая $y = 0$ во втором уравнении, находим, что $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. С другой стороны, полагая $y = x$ в том же уравнении и сопоставляя его с первым, получаем

$$f(x)^2 - 2xf(0) = f(0)^2 + x^2,$$

то есть

$$f(x)^2 = (x + f(0))^2.$$

Подставляя эти соотношение в исходное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{f(x)^2 - f((x-y)^2) + y^2}{2x} = \\ &= \frac{(x+f(0))^2 - (f(0)^2 + (x-y)^2) + y^2}{2x} = y + f(0). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что исходное уравнение имеет два решения $f(x) = x$ и $f(x) = x + 1$. $\square$

**8.** Имеем

$$A = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем искать матрицу $B$ в виде

$$B = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} B^2 &= x^2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + y^2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= 2x^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2y^2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ B^4 &= 8x^4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 8y^4\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ B^8 &= 128x^8\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 128y^8\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если $x = \sqrt[8]{a/128}$, $y = \sqrt[8]{b/128}$, то соответствующая матрица $B$ удовлетворяет уравнению $B^8 = A$. $\square$

**9.** Положим $a = 3\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$. Заметим, что $x^3 - y^3 > x^2 - y^2$ при $x > y > 1$. Поэтому

$$|a^m - b^n| = \left| \left(\sqrt{3^m}\right)^3 - \left(\sqrt{2^n}\right)^3 \right| > |3^m - 2^n| \geqslant 1.$$

Последнее неравенство следует из разной чётности чисел $3^m$ и $2^n$. Отсюда, очевидно, следует утверждение задачи. $\square$

## Четвертьфинал. «Тютельки» VS «ВАС»

Условия задач

**1.** Найти все простые числа вида $T_n + 1$, где $n$ — натуральное число, а

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

**2.** Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^1 + 2^2 + \ldots + n^n}{n^n}.$$

**3.** Для чисел $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c$ определить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы система линейных уравнений

$$\begin{cases} -a_3x_2 + a_2x_3 = b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 = b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 = b_3, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c \end{cases}$$

была несовместной.

**4.** Доказать, что для любых натуральных чисел $m$ и $n$

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{n+k}^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k C_n^k 2^k.$$

**5.** Найти вещественную функцию $f$, определённую на множестве вещественных чисел, тождественно не равную нулю, такую что

$$f(x)f(y) = f(x-y)$$

для всех возможных $x$ и $y$.

**6.** Каждая сторона выпуклого четырёхугольника меньше 20. Доказать, что для любой точки $O$ внутри четырёхугольника найдётся вершина $A$ четырёхугольника, такая что $|OA| < 15$.

## Результаты боя

| № задачи | Тютельки | | ВАС | Жюри |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | $\rightarrow$ | 0 | 0 |
| 3 | 0 | $\leftrightarrows$ | 4 | 8 |
| 2 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 4 | 0 | $\leftrightarrows$ | 12 | 0 |
| 5 | 0 | $\rightarrow$ | 8 | 4 |
| 1 | 12 | $\leftarrow$ | 0 | 0 |
| **Итог:** | 24 | | **36** | |

## Решения

**1.** Существует только три таких простых числа: $T_1+1=2$, $T_2+1=5$ и $T_3+1=11$. При $n \geqslant 4$ имеем $T_n+1=\frac{(n+3)(n^2+2)}{6}$, причём $n+3>6$ и $n^2+2>6$ и либо из чисел $n+3$ и $n^2+2$ одно чётное, а другое делится на 3, либо одно из них делится на 6. $\square$

**2.** Положим $a_n=\frac{1^1+2^2+\ldots+n^n}{n^n}$, тогда

$$1=\frac{n^n}{n^n} \leqslant a_n \leqslant \frac{n^1+n^2+\ldots+n^n}{n^n}=\frac{(n^{n+1}-n)/(n-1)}{n^n}=\frac{n^n-1}{n^n}\frac{n}{n-1}<\frac{n}{n-1}.$$

Так как $\frac{n}{n-1} \to 1$, то и $a_n \to 1$ при $n \to \infty$. $\square$

**3.** Положим

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \overline{A}=\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{pmatrix}$$

— матрица и расширенная матрица данной линейной системы соответственно.

Вычислим все миноры 3-го порядка матрицы $A$:

$$\Delta_1^{(3)}=\begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \Delta_2^{(3)}=\begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_3(a_1^2+a_2^2+a_3^2),$$

$$\Delta_3^{(3)}=\begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=-a_2(a_1^2+a_2^2+a_3^2),$$

$$\Delta_4^{(3)}=\begin{vmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=a_1(a_1^2+a_2^2+a_3^2).$$

Найдём также определитель расширенной матрицы данной линейной системы:

$$\overline{\Delta} = \begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & b_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & b_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & c \end{vmatrix} = -b_1\Delta_4^{(3)} + b_2\Delta_3^{(3)} - b_3\Delta_2^{(3)} + c\Delta_1^{(3)} =$$

$$= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right).$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то есть $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$. Тогда, если все числа $b_1, b_2, b_3, c$ равны нулю, то данная система является совместной и неопределённой (то есть имеет бесчисленное множество решений). Если же хотя бы одно из чисел $b_1, b_2, b_3, c$ отлично от нуля, то есть выполняется условие $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + c^2 \neq 0$, то система является несовместной.

2. Пусть $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$, то есть хотя бы одно из чисел $a_1, a_2, a_3$ отлично от нуля. Тогда хотя бы один из миноров $\Delta_2^{(3)}, \Delta_3^{(3)}, \Delta_4^{(3)}$ отличен от нуля. Это значит, что ранг матрицы $A$ равен 3. Если при этом выполняется условие $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, то ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ также равен 3, следовательно, согласно теореме Кронекера–Капелли данная система является совместной. Так как число неизвестных равно рангу матрицы $A$, то данная совместная система является определённой, то есть имеет единственное решение. Если же $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \neq 0$, то ранг расширенной матрицы $\overline{A}$ равен 4, то есть не равен рангу матрицы $A$, значит, данная система является несовместной.

Таким образом, если $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = 0$ и $b_1^2+b_2^2+b_3^2+c^2 \neq 0$ или $a_1^2+a_2^2+a_3^2 \neq 0$ и $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \neq 0$, то исходная система линейных уравнений является несовместной. $\square$

**4.** Докажем, что левая и правая части равенства есть не что иное, как количество элементов некоторого множества, сосчитанное разными способами. Для этого введём в рассмотрение два непересекающихся множества $M$ и $N$, содержащие $m$ и $n$ элементов соответственно.

Выберем $k$ элементов из $M$. Это можно сделать $C_m^k$ способами. Теперь добавим эти $k$ элементов к множеству $N$ и выберем $m$ элементов из полученного нового множества. Количество упорядоченных пар $(X, Y)$, где $X \subset M$, $Y \subset N \cup X$, $|X| = k$ и $|Y| = m$ равно $C_m^k C_{n+k}^m$. Перебирая все возможные значения $k$, получаем общее число пар $(X, Y)$,

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k C_{n+k}^m.$$

Теперь посчитаем количество пар $(X, Y)$ другим способом, выбирая сначала $Y$. Зафиксируем число элементов в $Y$, взятых из $N$. Пусть это число равно $j$ $(0 \leqslant j \leqslant m)$. Поскольку $|Y| = m$, то $|Y \cap M| = m - j$. Значит, имеется $C_n^j C_m^{m-j}$ способов выбрать $Y$ с общим числом элементов, равным $j$. Для данного $Y$ соответствующее ему множество $X$ должно содержать все элементы из $Y \cap M$ и, быть может, некоторые элементы из $M \setminus Y$. Поскольку $|M \setminus Y| = j$, то существует $2^j$ вариантов подобрать $X$. Общее количество пар с требуемым свойством равно

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k C_n^k 2^k.$$

Таким образом, равенство доказано. $\square$

**5.** Так как $f(x-y) = f(x)f(y)$ для любых $x, y \in \mathbb{R}$, то $f(x) = f(x+y)f(y)$. Если для какого-нибудь числа $y \in (-\infty, +\infty)$ будет $f(y) = 0$, то $f(x) \equiv 0$, что противоречит условию задачи. Полагая $y = x/2$ в равенстве $f(x-y) = f(x)f(y)$, получаем,

$$f(x)f(x/2) = f(x/2),$$

следовательно, $f(x) \equiv 1$. $\square$

**6.** Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ — вершины четырёхугольника, и пусть все отрезки $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$, $|OD|$ не меньше 15. Найдётся сторона четырёхугольника, которая видна из точки $O$ под углом не меньше $90^\circ$, пусть это будет сторона $AB$. Тогда $|AB|^2 \geqslant |OA|^2 + |OB|^2 \geqslant 2 \cdot 15^2 > 20^2$, что противоречит условию $|AB| \leqslant 20$. $\square$

## Четвертьфинал. «Департамент анализа данных» VS «Solid Snake»

Условия задач

**1.** За 6 минут до конца лекции группа студентов начинает по очереди наблюдать за мухой, ползущей по потолку в одном направлении (в сторону выхода) с непостоянной скоростью. Каждый начинает наблюдать раньше, чем закончил предыдущий, и наблюдает ровно 1 мин., причём замечает, что за эту минуту муха проползла ровно 1 м. Доказать, что до конца лекции муха проползла не более 10 м.

**2.** Докажите или опровергните утверждение: существует дважды непрерывно дифференцируемая на $[-1, 1]$ функция $f$, такая что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ сходится, а $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f(1/n)|$ расходится.

**3.** Пусть целочисленная матрица $M$ размера $n \times n$ такова, что её обратная матрица также состоит из целых чисел. Докажите, что количество нечётных элементов в $M$ не меньше, чем $n$, и не больше, чем $n^2 - n + 1$, причём данные границы являются наилучшими.

**4.** Докажите, что для любых натуральных чисел $p$ и $q$

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{2^{p+k}} C_{p+k}^k + \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{2^{q+k}} C_{q+k}^k = 2.$$

**5.** Найти все натуральные решения уравнения

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x + nx^n} = \frac{\ln(2n+17)}{n-1}.$$

**6.** Найти кривую $L$ на плоскости такую, что длина её дуги от фиксированной точки $M_0 \in L$ до произвольной точки $M \in L$ равна удвоенной разности длин отрезков $AM$ и $AM_0$, где $A$ — некоторая фиксированная точка плоскости.

Результаты боя

| № задачи | Департамент анализа данных | | Solid Snake | Жюри |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | $\rightarrow$ | 6 | 0 |
| 6 | 6 | $\leftrightarrows$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $\leftarrow$ | 12 | 0 |
| 2 | 8 | $\rightleftarrows$ | 0 | 4 |
| 4 | 0 | | 0 | 12 |
| 5 | 0 | | 0 | 12 |
| **Итог:** | **20** | | **18** | |

Решения

**1.** Пусть $A_1$ — первый наблюдатель, $A_2$ — последний из всех наблюдателей, начавших следить за мухой раньше, чем закончил $A_1$, $A_3$ — последний из всех наблюдателей, начавших следить за мухой раньше, чем закончил $A_2$, и так далее. Нечётные промежутки наблюдения $A_1$, $A_3$, $A_5$, $\ldots$, так же как и чётные $A_2$, $A_4$, $A_6$, $\ldots$, не пересекаются между собой (иначе один из наблюдателей был бы выбран неправильно). Но любой из промежутков равен 1 мин., а всё время наблюдения — 6 мин., поэтому как чётных, так и нечётных промежутков не более 5. Значит, число наблюдателей не больше 10, значит, муха проползла не более 10 м. При этом 10 м возможно, например, если она ползёт только тогда, когда за ней следит ровно один наблюдатель, а остальное время она стоит на месте (а наблюдателей ровно 10). $\square$

**2.** Предположим, что такая функция существует. Записывая формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(c_n)}{2n^2},$$

где $0 < c_n < 1/n$. Так как $\sum f(1/n)$ сходится, то $f(1/n) \to 0$ при $n \to \infty$, значит $f(0) = 0$ в силу непрерывности функции $f$. Так как $f''$ непрерывна на отрезке, то она ограничена, то есть найдётся такое число $M$, что $|f''(x)| \leqslant M$. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f''(c_n)}{2n^2} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{2n^2},$$

поэтому ряд $\sum f''(c_n)/(2n^2)$ сходится абсолютно. Но если бы $f'(0) \neq 0$, то ряд $f'(0)\sum 1/n$ расходился бы, а вместе с ним и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{f'(0)}{n} + \frac{f''(c_n)}{2n^2} \right).$$

Таким образом, $f'(0) = 0$ и $\sum |f(1/n)| = \sum \left| f''(c_n)/(2n^2) \right|$ сходится — противоречие. $\square$

**3.** Если матрица $M$ содержит менее, чем $n$ нечётных чисел, то найдётся строка, содержащая только чётные числа, пусть её номер равен $i$. Тогда все элементы в $i$-ой строке произведения $MM^{-1}$ чётные. Но единичная матрица $MM^{-1}$ на $i$-ом месте в $i$-ой строке содержит число 1, которое не является чётным — противоречие.

Пусть $M$ имеет более, чем $n^2 - n + 1$ нечётных элементов, тогда найдётся две строки, полностью состоящие из нечётных чисел. Пусть их номера равны $i$ и $j$. Тогда соответствующие элементы $i$-ой и $j$-ой строк матрицы $MM^{-1}$ должны быть сравнимы по модулю 2. Но $i$-ый элемент $i$-ой строки единичной матрицы равен 1, в то время как $i$-ый элемент $j$-ой строки равен 0. Поскольку $1 \not\equiv 0 \pmod 2$, получаем противоречие.

Эти границы достигаются на матрицах $M = I_n$ (единичная матрица) и

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В первом случае, очевидно, $I_n^{-1} = I_n$, а во втором случае

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в чём нетрудно убедиться. $\square$

**4.** После домножения обеих частей равенства на $2^{p+q}$ оно примет вид

$$\sum_{k=0}^{q} 2^{q-k} C_{p+k}^{k} + \sum_{k=0}^{p} 2^{p-k} C_{q+k}^{k} = 2^{p+q+1}. \tag{4}$$

Правая часть равна количеству всевозможных строк из нулей и единиц длины $p+q+1$. Разобьём это множество на два непересекающихся подмножества $A$ и $B$, где $A$ — множество строк, содержащих как минимум $p+1$ единиц, $B$ — его дополнение, то есть множество строк, содержащих как минимум $q+1$ нулей.

Если номер позиции $(p+1)$-ой единицы равен $p+k+1$ $(0 \leqslant k \leqslant q)$, то существует $C_{p+k}^{p} = C_{p+k}^{k}$ способов выбрать первые $p$ единиц. Последующие элементы строки можно сделать равными единице $2^{q-k}$ способами. Таким образом, существует $2^{q-k} C_{p+k}^{k}$ строк из множества $A$, в которых $(p+1)$-ая единица стоит на $(p+k+1)$-ом месте. Значит первая сумма в левой части равенства (4) равна количеству элементов в множестве $A$. Аналогично, вторая сумма даёт количество элементов в $B$, откуда следует справедливость исходного равенства. $\square$

**5.** Подынтегральная функция имеет вид

$$\frac{1}{x+nx^n} = \frac{1}{x} - \frac{nx^{n-2}}{1+nx^{n-1}}.$$

Тогда данный интеграл равен

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x+nx^n} = \left(\ln x - \frac{1}{n-1} \ln\left(1+nx^{n-1}\right)\right)\Bigg|_1^{\infty} =$$

$$= \frac{\ln(n+1)}{n-1} + \frac{1}{n-1} \lim_{n\to\infty} \ln \frac{x^{n-1}}{1+nx^{n-1}} = \frac{1}{n-1} \ln \frac{n+1}{n}.$$

Значит исходное уравнение сводится к виду

$$\frac{n+1}{n} = 2n+17,$$

которое натуральных решений не имеет. $\square$

**6.** Найдём кривую в полярных координатах, выбрав $A$ в качестве полюса. Из условия задачи следует

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{(r')^2 + r^2}\, d\varphi = 2(r - r_0), \quad r > r_0.$$

Дифференцируя обе части равенства по $\varphi$, получаем уравнение

$$\sqrt{(r')^2 + r^2} = 2r',$$

то есть $r' = r/\sqrt{3}$, а значит $r = ce^{\varphi/\sqrt{3}}$. Начальные условия дают $r(\varphi_0) = r_0 = ce^{\varphi_0/3}$. Получаем, что искомая кривая задаётся уравнением $r = r_0 e^{(\varphi-\varphi_0)/\sqrt{3}}$. $\square$

## Четвертьфинал. «Команда имени Рамзана Кадырова» VS «BananaBoys»

### Условия задач

**1.** В ряд выписаны натуральные числа от 1 до 100 в некотором порядке. Какое наименьшее значение может принимать максимальная сумма десяти чисел, стоящих подряд?

**2.** Найти все возможные значения, которые может принимать предел

$$f(a, b) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n + a^2}{n + b^2}\right)^n,$$

если вещественные числа $a$ и $b$ пробегают множество, определяемое неравенством $4a^2 + b^2 + 2b \leqslant 3$.

**3.** Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных вещественных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2017$, вещественных корней не имеет. Докажите, что $P(2017) > \frac{1}{64}$.

**4.** Пусть точки $D$ и $E$ лежат на сторонах $AC$ и $AB$ треугольника $ABC$. Докажите, что площадь четырёхугольника $BCDE$ в четыре раза больше площади треугольника $AMN$, если точки $M$ и $N$ — середины отрезков $BD$ и $CE$.

**5.** Пусть функция $f$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, $f(0) = f(1)$. Доказать, что существует хорда графика $y = f(x)$ длины $\frac{1}{5}$, параллельная оси абсцисс.

**6.** Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right).$$

### Результаты боя

| № задачи | Команда им. Рамзана Кадырова | | BananaBoys | Жюри |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 12 | $\leftarrow$ | 0 | 0 |
| 4 | 0 | $\rightleftarrows$ | 6 | 6 |
| 6 | 2 | $\rightarrow$ | 0 | 10 |
| 5 | 6 | $\leftrightarrows$ | 0 | 6 |
| 3 | 6 | $\leftrightarrows$ | 0 | 6 |
| 2 | 6 | $\leftarrow$ | 2 | 4 |
| **Итог:** | **32** | | **8** | |

# <u>Решения</u>

**1.** Пусть $S_k$ — сумма чисел, стоящих на местах с номерами $k, k+1, \ldots, k+9$. Докажем, что наименьшее значение максимальной суммы не может быть меньше, чем 505. Предполагая противное, получаем

$$S_1 + S_{11} + \ldots + S_{91} < 505 \cdot 10 = 5050,$$

в то время как сумма всех чисел от 1 до 100 равна 5050 — противоречие.

Пример, когда наименьшее значение максимальной суммы равно 505, даёт последовательность

$$100, 1, 90, 11, 80, 21, 70, 31, 60, 41, 99, 2, 89, 12,$$
$$79, 22, 69, 32, 59, 42, 98, 3, 88, \ldots, 61, 40, 51, 50.$$

В первой десятке сумма равна 505. Сдвигая десятки на одно число вправо сумма сначала уменьшается, затем увеличивается на 1 и т. д. Таким образом, сумма в любой десятке стоящих подряд чисел не првеосходит 505. $\square$

**2.** Имеем

$$f(a,b) = \lim_{n\to\infty} \left( \left( 1 + \frac{a^2-b^2}{n+b^2} \right)^{\frac{n+b^2}{a^2-b^2}} \right)^{\frac{n(a^2-b^2)}{n+b^2}} =$$
$$= \left( \lim_{n\to\infty} \left( 1 + \frac{a^2-b^2}{n+b^2} \right)^{\frac{n+b^2}{a^2-b^2}} \right)^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a^2-b^2)}{n+b^2}} = e^{a^2-b^2}.$$

Поскольку полученная функция непрерывна, то возможные значения $f(a,b)$ — числа в диапазоне между её наименьшим и наибольшим значением в эллипсе $E$, определяемом неравенством

$$a^2 + \frac{(b+1)^2}{4} \leqslant 1.$$

Стационарная точка $(0,0)$ принадлежит $E$, $f(0,0) = 1$. Рассмотрим функцию $f$ на границе эллипса

$$f(a,b) = e^{a^2-b^2} = e^{\left(3-2b-5b^2\right)/4} = g(b), \quad b \in [-3, 1].$$

Производная функции $g$ равна нулю в точке $b = -1/5$, $g(-1/5) = e^{0{,}8}$. Далее, на границах отрезка $g(-3) = e^{-9}$, $g(1) = e^{-1}$. Таким образом, $e^{-9} \leqslant f(a,b) \leqslant e^{0{,}8}$. $\square$

**3.** По условию $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, следовательно,

$$P(Q(x)) = (Q(x)-x_1)(Q(x)-x_2)(Q(x)-x_3),$$

где $Q(x)-x_i \neq 0$, $i=1,2,3$, то есть дискриминанты $D_i = 1-4(2017-x_i) < 0$. Перемножив полученные неравенства

$$2017 - x_i > \frac{1}{4},$$

получаем $P(2017) = (2017-x_1)(2017-x_2)(2017-x_3) > \frac{1}{64}$. $\square$

**4.** Площадь треугольника $AMN$ равна

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AN}\right| = \frac{1}{8}\left|\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right) \times \left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{8}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}\right|.$$

Поскольку векторы $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}$ перпендикулярны плоскости треугольника и направлены в одну сторону, то полученная величина равна четверти площади четырёхугольника $BCDE$. $\square$

**5.** Пусть $g(x) = f\left(x+\frac{1}{5}\right) - f(x)$. Требование задачи означает, что для некоторого $x \in [0, 4/5]$ будет $g(x)=0$. Имеем

$$g(0) + g\left(\frac{1}{5}\right) + g\left(\frac{2}{5}\right) + g\left(\frac{3}{5}\right) + g\left(\frac{4}{5}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

Либо одно из слагаемых равно нулю, либо существует пара соседних слагаемых разного знака. В силу того, что $g$ непрерывна, в некоторой промежуточной точке она обращается в 0. $\square$

**6.** Вопрос о сходимости имеет смысл рассматривать только при $x>0$, так как только в этом случае определены все члены ряда. Пусть $x>0$, тогда

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^x}\right) = \frac{(-1)^n}{n^x} - c_n,$$

где $c_n > 0$, $c_n \sim \frac{1}{2n^{2x}}$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ сходится по признаку Лейбница, поэтому сходимость исходного ряда равностильна сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{2x}}$, который сходится в случае $x > 1/2$ и расходится при $x \leqslant 1/2$. $\square$

## Полуфинал. «ВАС» VS «Департамент анализа данных»

Условия задач

**1.** Найти все целые значения $n$, для которых число $\sqrt[3]{3^n - 1}$ является целым.

**2.** Найти предел при $n \to \infty$ выражения

$$a_n(p) = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{k} p^k (1-p)^{2n+1-k},$$

если $0 < p < 1$.

**3.** Найти сумму ряда

$$\frac{(\pi/6)^3}{3!} + \frac{(\pi/6)^7}{7!} + \frac{(\pi/6)^{11}}{11!} + \ldots .$$

**4.** Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $4 \times 4$, $a_{ij} = \sin(x_i + y_j)$, где $x_i, y_j$ — произвольные вещественные числа. Доказать, что $\det A = 0$.

**5.** Для всех значений вещественного параметра $p > 1$ решить уравнение

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{\text{n букв x}} = p.$$

**6.** Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиуса $r$, при этом $AB = CD = EF = r$. Доказать, что середины сторон $BC$, $DE$ и $FA$ являются вершинами правильного треугольника.

Результаты боя

| № задачи | ВАС | | Департамент анализа данных | Жюри |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 2 | 0 | $\leftrightarrows$ | 12 | 0 |
| 4 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 3 | 12 | $\leftarrow$ | 0 | 0 |
| 5 | 4 | $\rightleftarrows$ | 2 | 6 |
| 1 | 12 | $\leftarrow$ | 0 | 0 |
| **Итог:** | **28** | | **38** | |

Решения

**1.** Пусть $x = \sqrt[3]{3^n - 1}$. Тогда задача сводится к решению в целых числах уравнения

$$x^3 + 1 = 3^n. \qquad (5)$$

Если $n < 0$, то правая часть (5) дробная, а левая — целая, следовательно, должно быть $n \geqslant 0$.

Если $n = 0$, то $x = 0$.

Пусть $n \geqslant 1$, тогда $x \geqslant 2$. Запишем уравнение (5) в виде

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 3^n.$$

Так как произведение чисел $x+1$ и $x^2-x+1$ равно степени простого числа 3, то каждое из этих чисел является степенью тройки. При $x \geqslant 2$ верно неравенство

$$x^2-x+1 \geqslant x+1,$$

а так как большая степень натурального числа делится на меньшую степень того же числа, то $x^2-x+1$ кратно $x+1$. Имеем

$$x^2-x+1 = x^2-x-2+3 = (x+1)(x-2)+3,$$

следовательно, 3 кратно $x+1$. Значит, $x=2$ и $n=2$.

Таким образом, только два числа удовлетворяют условию задачи: $n=0$ и $n=2$. □

**2.** Если $p=1/2$, то

$$a_n(p) = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_{2n+1}^k}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Если $p>1/2$, то

$$0 \leqslant a_n(p) \leqslant p^n(1-p)^{n+1} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k = 4^n p^n (1-p)^{n+1} = b_n(p).$$

Но при $p>1/2$ будет $4p(1-p)<1$. Поэтому $b_n(p) \to 0$ при $n \to \infty$, следовательно, $a_n(p) \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $p<1/2$, то из соотношения $a_n(p) = 1 - a_n(1-p)$ вытекает, что $a_n(p) \to 1$ при $n \to \infty$. □

**3.** Пусть

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}.$$

Искомая сумма равна $s(\pi/6)$. Ряд сходится на всей оси по признаку Даламбера. Так как степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз внутри интервала сходимости, то

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(4n+2)!}, \ldots, s^{(4)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!} = s(x),$$

причём $s(0)=s'(0)=s''(0)=0$, $s^{(3)}(0)=1$. Решим уравнение $s^{(4)}(x)=s(x)$. Корни соответствующего характеристического уравнения $k_{1,2}=\pm 1$, $k_{3,4} = \pm i$. Отсюда получаем

$$s(x) = A\sin x + B\cos x + Ce^x + De^{-x}.$$

Из начальных условий находим

$$A = -\frac{1}{2},\ B = 0,\ C = \frac{1}{4},\ D = -\frac{1}{4}.$$

Значит, $s(x) = -(\sin x - \operatorname{sh} x)/2$, то есть сумма исходного ряда равна $s(\pi/6) = (\operatorname{sh}(\pi/6) - 1/2)/2$. $\square$

**4.** Столбец матрицы $A$ с номером $j$ равен $\varphi(y_j)$, где

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \sin(x_1+t) \\ \sin(x_2+t) \\ \sin(x_3+t) \\ \sin(x_4+t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_1 \cos t + \cos x_1 \sin t \\ \sin x_2 \cos t + \cos x_2 \sin t \\ \sin x_3 \cos t + \cos x_3 \sin t \\ \sin x_4 \cos t + \cos x_4 \sin t \end{pmatrix} = \cos t \cdot \varphi(0) + \sin t \cdot \varphi(\pi/2).$$

Получаем, что любой столбец матрицы принадлежит линейному пространству, образованному векторами $\varphi(0)$ и $\varphi(\pi/2)$. Поскольку их количество больше размерности этого пространства, то они линейно зависимы, а значит, $\det A = 0$. $\square$

**5.** Докажем, что при $p \in (1, e]$ имеется единственное решение $x = p^{1/p}$, а при $p > e$ решений нет. Положим

$$a_n(x) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}_{\text{n букв x}}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n(x).$$

Заметим, что при $p > 1$ исходное уравнение не имеет решений в промежутке $(0, 1]$, поскольку в этом случае $a_n(x) \leqslant 1$.

Обозначим через $D(f)$ множество значений $x > 1$, при которых существует конечный предел $f(x)$; $E(f)$ — образ множества $D(f)$ при отображении $f$; $g(t) = t^{1/t}$.

**Лемма.** *Справедливы следующие утверждения:*

*1) последовательность $a_n(x)$ возрастает, если $x > 1$;*

*2) функция $g$ взаимно однозначно отображает $(1, e]$ на $(1, e^{1/e}]$, кроме того, $\max\limits_{t>1} g(t) = e^{1/t}$;*

*3) функция $f$ взаимно однозначно отображает $D(f)$ на $E(f)$, обратное отображение задаётся формулой $f^{-1}(y) = y^{1/y}$;*

*4) $D(f) = (1, e^{1/e}]$;*

*5) $E(f) = (1, e]$.*

Мы ответим на поставленный в задаче вопрос, если докажем лемму. Действительно, из п. 5 следует, что решения исходного уравнения существуют при любом $p \in (1, e]$, а при $p > e$ решений нет. Единственность решения $x = p^{1/p}$ при $p \in (1, e]$ обеспечивает п. 3.

*Доказательство леммы.* Установим отдельно справедливость каждого пункта.

1. Утверждение легко проверяется методом математической индукции.

2. Производная функции $g$ равна

$$g'(t) = g(t)\,(\ln g(t))' = t^{1/t}\frac{1-\ln t}{t^2}.$$

Так как $g'(t) > 0$ при $t \in [1, e)$, то функция $g$ строго возрастает на $[1, e]$. Поскольку $g(1) = 1$, $g(e) = e^{1/e}$, то $(1, e] \xrightarrow{g} (1, e^{1/e}]$ — биекция. Так как $g'(t) < 0$ при $t > e$, то $\max\limits_{t>1} g(t) = g(e) = e^{1/e}$.

3. Пусть $y \in E(f)$, тогда существует $x \in D(f)$, такой что $y = f(x)$. Переходя в равенстве $a_{n+1}(x) = x^{a_n(x)}$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $y = x^y$. Следовательно, для каждого элемента $y \in E(f)$ его прообраз восстанавливается однозначно по формуле $x = y^{1/y}$.

4. Пусть $x \in (1, e^{1/e}]$. Из п. 2 следует существование числа $t \in (1, e]$, такого что $g(t) = x$. Докажем методом математической индукции неравенство $a_n(x) < t$. Так как $t > 1$, то $a_1(x) = x = g(t) = t^{1/t} < t$. Предполагая $a_k(x) < t$, имеем $a_{k+1}(x) = \left(t^{1/t}\right)^{a_k(x)} < \left(t^{1/t}\right)^t = t$. Таким образом, последовательность $a_n(x)$ ограничена и возрастает (п. 1). По теореме Вейерштрасса существует конечный предел $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) \leqslant t \leqslant e$, а значит, $x \in D(f)$. Попутно мы установили неравенство

$$f(x) \leqslant e \quad \text{при любом } x \in (1, e^{1/e}]. \tag{6}$$

Докажем теперь обратное включение. Пусть $x \in D(f)$, тогда $x > 1$ по определению $D(f)$. Принимая во внимание п. 1, находим $a_n(x) \geqslant a_1(x) = x > 1$, поэтому $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n(x) \geqslant a_1(x) > 1$. Отсюда, во-первых, следует

$$f(x) > 1 \quad \text{при любом } x \in D(f). \tag{7}$$

Во-вторых, полагая $y = f(x)$, получаем $x = y^{1/y}$ (п. 3), а значит, $x = g(y) \leqslant \max\limits_{t>1} g(t) = e^{1/e}$ (п. 2). Таким образом, $x \in (1, e^{1/e}]$.

5. Включение $E(f) \subset (1, e]$ следует из неравенств (7) и (6) (уже доказано, что $D(f) = (1, e^{1/e}]$). Установим обратное включение. Пусть $y \in (1, e]$, тогда $y^{1/y} > 1$ и $y^{1/y} \leqslant e^{1/e}$ (п. 2), то есть $y^{1/y} \in (1, e^{1/e}] = D(f)$ (п. 4). Положим $z = f\left(y^{1/y}\right)$, отсюда получаем, что $z^{1/z} = f^{-1}(z) = y^{1/y}$ (п. 3). Другими словами, $g(z) = g(y)$. Но $z \in E(f) \subset (1, e]$ и $y \in (1, e]$, а функция $g$ взаимно однозначно отображает $(1, e]$ на $(1, e^{1/e}]$ (п. 2), поэтому $z = y$, а значит, $y \in E(f)$. □

**6.** Рассмотрим комплексную плоскость с началом координат в центре $O$ данной окружности. Модуль чисел $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\eta$, $\varphi$, соответствующих вершинам шестиугольника, равен $r$. Кроме того, поскольку длины отрезков $AB$, $CD$ и $EF$ равны радиусу, то $\angle AOB = \angle COD = \angle EOF = \pi/3$. Следовательно, $\beta = \alpha e^{i\pi/3}$, $\delta = \gamma e^{i\pi/3}$ и $\varphi = \eta e^{i\pi/3}$. Середины $M$, $N$ и $P$ сторон $BC$, $DE$ и $FA$ соответствуют числам

$$m = \frac{1}{2}\left(\alpha e^{i\pi/3} + \gamma\right), \quad n = \frac{1}{2}\left(\gamma e^{i\pi/3} + \eta\right), \quad p = \frac{1}{2}\left(\eta e^{i\pi/3} + \alpha\right).$$

Имеем

$$\frac{m-n}{p-n} = \frac{\alpha e^{i\pi/3} + \gamma(1-e^{i\pi/3}) - \eta}{\alpha - \gamma e^{i\pi/3} + \eta(e^{i\pi/3}-1)} = \frac{\alpha e^{i\pi/3} - \gamma e^{2i\pi/3} + \eta e^{3i\pi/3}}{\alpha - \gamma e^{i\pi/3} + e^{2i\pi/3}\eta} = e^{i\pi/3}.$$

Следовательно, отрезок $MN$ получен из $PN$ поворотом вокруг $N$ на $\pi/3$. Значит, треугольник $MNP$ правильный, что и требовалось. $\square$

## Финал. «Мнимая единица» VS «Департамент анализа данных»

Условия задач

**1.** Докажите, что не существует натуральных чисел $x$, $y$, $z$, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + 10y^2 = 3z^2.$$

**2.** Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами, такие, что $P\left(P'(x)\right) = P'(P(x))$ для любых вещественных значений $x$.

**3.** Пусть вещественная квадратная матрица $A$ размера $n \times n$ обладает свойством: $A + A^T = O_n$ (нулевая матрица порядка $n$). Докажите, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\det(I_n + \lambda A^2) \geqslant 0,$$

где $I_n$ — единичная матрица порядка $n$.

**4.** Для любого вещественного значения $\lambda$ обозначим через $f(\lambda)$ вещественный корень уравнения

$$x(1 + \ln x) = \lambda.$$

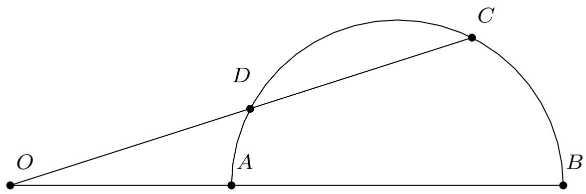
Докажите, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(\lambda)}{\frac{\lambda}{\ln \lambda}} = 1.$$

**5.** Докажите, что для всех вещественных значений $x$ и натуральных $n > 1$, верно неравенство

$$|\cos(2x)|^{n/2} \leqslant \left|\cos^{2n} x - \sin^{2n} x\right|.$$

**6.** Из точки $O$, лежащей на продолжении диаметра $AB$ полукруга, проведена секущая, которая пересекает полуокружность в точках $D$ и $C$. Докажите, что площадь четырёхугольника $ABCD$ максимальна, если длина ортогональной проекции отрезка $DC$ на $AB$ равна радиусу полукруга.




## Результаты боя

| № задачи | Мнимая единица | | Департамент анализа данных | Жюри |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 3 | 12 | $\leftarrow$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $\rightarrow$ | 12 | 0 |
| 5 | 2 | $\leftrightarrows$ | 10 | 0 |
| 2 | 6 | $\rightarrow$ | 6 | 0 |
| 6 | 6 | $\leftrightarrows$ | 0 | 6 |
| **Итог:** | **26** | | **40** | |

## Решения

**1.** Число в левой части равенства может оканчиваться на цифру 0, 1, 4, 5, 6 или 9, в то время как число в правой части оканчивается на 0, 2, 3, 5, 7 или 8. Отсюда следует, что если существует решение $(x, y, z)$, то числа $x$ и $z$ должны делиться на 5, то есть $x = 5x_0$ и $z = 5z_0$, где $x_0$ и $z_0$ — натуральные. Подставляя эти выражения в уравнение, находим, что $25x_0^2 + 10y^2 = 3 \cdot 25z_0^2$. Значит, $y$ тоже делится на 5, то есть $y = 5y_0$. Таким образом, натуральные числа $x_0, y_0, z_0$ удовлетворяют тому же уравнению. Повторяя те же рассуждения, мы построим бесконечную строго убывающую последовательность натуральных чисел, что невозможно. А значит, решений в натуральных числах у исходного уравнения нет. □

**2.** Рассмотрим случай $n \geqslant 2$. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$. Тогда

$$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1.$$

Приравнивая коэффициенты при $x^{n(n-1)}$ в равенстве $P(P'(x)) = P'(P(x))$, получаем

$$a_n^{n+1} \cdot n^n = a_n^n \cdot n.$$

Отсюда, $a_n n^{n-1} = 1$, а значит, $a_n = 1/n^{n-1}$. Поскольку $a_n$ — целое число, то $n = 1$, что противоречит предположению.

Пусть теперь $n = 1$ и $P(x) = ax + b$. Тогда $a^2 + b = a$, то есть $b = a - a^2$. Следовательно, любой многочлен вида $P(x) = ax + a - a^2$ удовлетворяет условию задачи. □

**3.** Пусть $\lambda \geqslant 0$, тогда

$$\begin{aligned}\det(I_n+\lambda A^2) &= \det\Big((I_n+i\sqrt{\lambda}A)(I_n-i\sqrt{\lambda}A)\Big) = \\ &= \det(I_n+i\sqrt{\lambda}A)\det(I_n-i\sqrt{\lambda}A) = \\ &= \det(I_n+i\sqrt{\lambda}A)\overline{\det(I_n+i\sqrt{\lambda}A)} = \Big|\det(I_n+i\sqrt{\lambda}A)\Big|^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $\lambda < 0$. Положим $\omega = \sqrt{-\lambda}$, тогда

$$\begin{aligned}\det(I_n+\lambda A^2) &= \det(I_n-\omega^2A^2) = \\ &= \det\left((I_n-\omega A)(I_n+\omega A)\right) = \det(I_n-\omega A)\det(I_n+\omega A).\end{aligned}$$

Поскольку $-A = A^T$, то

$$I_n-\omega A = I_n+\omega A^T = (I_n+\omega A)^T.$$

Следовательно,

$$\det(I_n+\lambda A^2) = \det(I_n+\omega A)^T\det(I_n+\omega A) = (\det(I_n+\omega A))^2 \geqslant 0,$$

таким образом, неравенство полностью доказано. □

**4.** Функция $h\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$, определённая равенством $h(t) = t(1+\ln t)$ строго возрастает, $h(1) = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \infty$. Значит, $h$ — биекция, а обратной к ней будет функция $f\colon [1,\infty) \to [1,\infty)$, $\lambda \to f(\lambda)$. Поскольку $h$ дифференцируема, то такова и $f$, при этом

$$f'(\lambda) = \frac{1}{h'(x(\lambda))} = \frac{1}{2+\ln f(\lambda)}.$$

Так как $h$ строго возрастает и $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \infty$, то и $f$ строго возрастает и стремится к бесконечности. Принимая во внимание определение $f(\lambda)$, находим

$$\frac{f(\lambda)}{\frac{\lambda}{\ln\lambda}} = \ln\lambda\cdot\frac{f(\lambda)}{\lambda} = \frac{\ln\lambda}{1+\ln f(\lambda)}.$$

Применяя правило Лопиталя, получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda)}{\frac{\lambda}{\ln\lambda}} = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\frac{1}{f(\lambda)}}{\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{1}{2+\ln f(\lambda)}} = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{f(\lambda)}{\lambda}(2+\ln f(\lambda)) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{2+\ln f(\lambda)}{1+\ln f(\lambda)} = 1,$$

что и требовалось. □

**5.** Пусть $a = \cos^2 x$, $b = \sin^2 x$. Тогда $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a+b = 1$, и после применения формулы двойного угла неравенство принимает вид

$$|a-b|^{n/2} \leqslant |a^n-b^n|.$$

Поскольку $|a+b|^{n/2}=1$, то доказываемое неравенство эквивалентно

$$|a^2-b^2|^{n/2} \leqslant |a^n-b^n|.$$

Если $a=b$, то неравенство обращается в равенство. Пусть $a>b$, положим $c=\sqrt{a^2-b^2}$, тогда требуется доказать, что

$$c^n \leqslant (c^2+b^2)^{n/2}-b^n.$$

При $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{aligned}(c^2+b^2)^{n/2} &= (c^2+b^2)(c^2+b^2)^{(n-2)/2} = \\ &= c^2(c^2+b^2)^{(n-2)/2}+b^2(c^2+b^2)^{(n-2)/2} \geqslant c^2c^{n-2}+b^2b^{n-2}=c^n+b^n.\end{aligned}$$

Те же рассуждения применяются и в случае, когда $a<b$. ☐

**6.** Радиус данной окружности можно принять за единицу, и пусть $Q$ — её центр. Положим $2e=CD$, $k=OQ$, $\theta=\angle COB$. Тогда $e=\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, $OD=k\cos\theta-e$, $OC=k\cos\theta+e$, $OA=k-1$, $OB=k+1$. Следовательно, площадь четырёхугольника $ABCD$

$$\begin{aligned}S_{ABCD} &= \frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\theta-\frac{1}{2}OA\cdot OD\sin\theta = \\ &= \frac{1}{2}\sin\theta\,((k+1)(k\cos\theta+e)-(k-1)(k\cos\theta-e)) = \\ &= k\sin\theta(e+\cos\theta) = \\ &= k\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}+k\sin\theta\cos\theta.\end{aligned}$$

Приравнивая к нулю производную полученного выражения, находим

$$(2e\cos\theta-1)(e+\cos\theta)=0.$$

Отсюда следует, что максимум достигается при $2e\cos\theta=1$. ☐