Р Е Ш Е Н И Я

1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

Решение. No comments.

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,b-a]$. Вычислить $\int\limits_a^b \dfrac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}$.

Решение.

Сделаем замену переменной $t=x-a$:

$$I=\int\limits_a^b \frac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}=\int_0^{b-a}\frac{f(t)dt}{f(t)+f(b-a-t)}=\int_0^{b-a}\frac{f(t)+f(b-a-t)-f(b-a-t)}{f(t)+f(b-a-t)}dt=$$

$$=b-a-\int_0^{b-a}\frac{f(b-a-t)dt}{f(t)+f(b-a-t)}.$$

В последнем интеграле обозначим $z=b-a-t$. Тогда

$$I=b-a+\int_{b-a}^0\frac{f(z)dz}{f(b-a-z)+f(z)}=b-a-I.$$

Откуда $I=\dfrac{b-a}{2}$.

3. Найти решение дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$y+\frac{x}{1!}y'+\frac{x^2}{2!}y''+\frac{x^3}{3!}y'''+\ldots=e^x\ .$$

Решение.

Подставляя в уравнение $x=0$, получим $y(0)=1$.

Далее, дифференцируя данное уравнение и подставляя $x=0$, получим $y'(0)=\dfrac{1}{2}$ и т. д.

$y^{(n)}=\dfrac{1}{2^n}$. Отсюда, по формуле Тейлора $y(x)=1+\dfrac{1}{1!}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\ldots+\dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n+\ldots=e^{x/2}$.

4. Непрерывная и дифференцируемая на отрезке $[0,4]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(0)=0,\ \ f(4)=4,\ \ \max\limits_{[0,4]}|f'(x)|\le 2$. Доказать, что $\max\limits_{[0,4]}|f(x)|\le 6$.

Решение.

Применим формулу Лагранжа к функции $f(x)$ на промежутке $[0,x]$: $f(x)-f(0)=f'(c)x$, откуда следует, что на промежутке $[0,4]$ выполняется неравенство $|f(x)|\le 2x$.

Аналогично, применяя теорему Лагранжа на промежутке $[x,4]$, получим

$f(x)\le|f(x)|\le 12-2x$.

Отсюда для всякого значения $x \in [0,4]$ выполняется неравенство
$\left|f(x)\right| \le \min(2x, 12-2x) \le \max\limits_{[0,4]} \min(2x, 12-2x) = 6$

5. Полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что для всякого x выполняется равенство
$P(x^2 - x + 1) = Q(x^2 + x + 1)$. Докажите, что $P(x)$ и $Q(x)$ – константы.
Решение.
Заменяя x на $-x$, получим $P(x^2 + x + 1) = Q(x^2 - x + 1)$.
Выделяя полный квадрат, получим $Q(x^2 + x + 1) = Q\left((x+1)^2 - (x+1) + 1\right)$.
Отсюда,
$P(x^2 - x + 1) = Q(x^2 + x + 1) = Q\left((x+1)^2 - (x+1) + 1\right) =$
$= P\left((x+1)^2 + (x+1) + 1\right) = P(x^2 + 3x + 3)$
Следовательно, $P(1) = P(3) = P(7) = P(13) = P(21) = \ldots$ и аналогично для многочлена $Q(x)$.
Многочлен, принимающий одно и то же значение бесконечно много раз, есть константа.

6. Последовательность задана $f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Докажите, что $\sqrt[n]{f_{n+1}} > 1 + \frac{1}{\sqrt[n]{f_n}}$.

Решение.
Запишем неравенство для средних $\frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_2} + \ldots + \frac{f_n}{f_{n+1}}\right) \ge \sqrt[n]{\frac{1}{f_{n+1}}}$.

По условию $\frac{f_k}{f_{k+1}} = 1 - \frac{f_{k-1}}{f_{k+1}}$, откуда $\frac{1}{n}\left(\frac{f_1}{f_2} + \ldots + \frac{f_n}{f_{n+1}}\right) = \frac{1}{n}\left(n - \left(\frac{f_0}{f_2} + \frac{f_1}{f_3} + \ldots \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}\right)\right) =$
$= 1 - \frac{1}{n}\left(\frac{f_0}{f_2} + \frac{f_1}{f_3} + \ldots \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}\right)$, где $f_0 = f_2 - f_1 = 1$.

Применяя еще раз неравенство о среднем, получим $1 - \frac{1}{n}\left(\frac{f_0}{f_2} + \ldots + \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}\right) \le 1 - \sqrt[n]{\frac{1}{f_n \cdot f_{n+1}}}$, откуда

$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{f_n \cdot f_{n+1}}} \ge \frac{1}{\sqrt[n]{f_{n+1}}}$. Умножая последнее неравенство на $\sqrt[n]{f_{n+1}}$, получим требуемое.