СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА С-ПбГУ ИТМО

ПО МАТЕМАТИКЕ

(2004/2005 учебный год)

1. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,b-a]$. Вычислить $\int\limits_a^b \dfrac{f(x-a)\,dx}{f(x-a)+f(b-x)}$.

3. Найти решение дифференциального уравнения бесконечного порядка

$$y+\frac{x}{1!}y'+\frac{x^2}{2!}y''+\frac{x^3}{3!}y'''+\ldots=e^x .$$

4. Непрерывная и дифференцируемая на отрезке $[0,4]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(0)=0,\ f(4)=4,\ \max\limits_{[0,4]}\left|f'(x)\right|\le 2$. Доказать, что $\max\limits_{[0,4]}\left|f(x)\right|\le 6$.

5. Полиномы $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что для всякого x выполняется равенство $P\left(x^2-x+1\right)=Q\left(x^2+x+1\right)$. Докажите, что $P(x)$ и $Q(x)$ – константы.

6. Последовательность задана $f_1=1, f_2=2, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$. Докажите, что $\sqrt[n]{f_{n+1}}>1+\dfrac{1}{\sqrt[n]{f_n}}$.

7. Через точку O трехмерного евклидова пространства проходит N прямых. Угол между любыми двумя из них не меньше α, где $0<\alpha<\pi/2$. Доказать, что $N\le\dfrac{1}{1-\cos\alpha/2}$.

8. Доказать, что на поверхности, заданной уравнением $x^3+y^3+z^4+1=0$, не лежит ни одна прямая.

9. Найти определитель n-го порядка $\begin{vmatrix}\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\alpha & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha\end{vmatrix}$.

10. Пусть $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a_n & b_n\\ c_n & d_n\end{pmatrix}$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

11. Пусть A - квадратная матрица и $A^n=0$. Вычислить $(A-E)^{-1}$, где E - единичная матрица того же порядка, что и A.