СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА С-ПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ (2005-2006 уч. г.)

1. Вычислить предел $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}}$

2. Пусть $P(x)$ - многочлен степени n и $P(a)\ge 0,\ P'(a)\ge 0,\dots,P^{(n-1)}(a)\ge 0, P^{(n)}(a)>0$. Доказать, что вещественные корни уравнения $P(x)=0$ не превосходят *a*.

3. Указать какую-нибудь функцию, непрерывную на всей вещественной оси, отличную от линейной и удовлетворяющую условию $\forall x\in R \quad f(x+1)=f(x)+1$.

4. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[1,+\infty)$ и $\forall x\in[1,+\infty) \quad f(x)>0$. Пусть также на любом конечном промежутке $[a,b],\quad 1\le a<b$ функция $f(x)$ интегрируема. Доказать, что, если для достаточно больших значений x выполняется неравенство $\dfrac{f(x^2)}{f(x)}\le\dfrac{q}{2x}$, где $q<1$, то интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=xy'+y+1$ при условиях $y(0)=y'(0)=0$.

6. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз на промежутке $[0,1]$ и $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$ для $k=1,2,\dots,n-1$. Докажите, что существует $x\in[0,1]$, для которого выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|\ge n!2^{n-1}\left|f(0)-f(1)\right|$.

7. Доказать, что векторное уравнение $\vec{x}\times\left(\vec{a}\times\vec{x}\right)+\vec{b}\times\vec{x}=\vec{0}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет ненулевое решение.

8. Найти сумму квадратов всех миноров порядка 2 ортогональной матрицы порядка n.

9. Найти пересечение внутренностей всех ромбов, вписанных в данный эллипс.

10. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ не существуют $n+2$ вектора, попарно образующие тупые углы.

Решения.

1.

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}=\lim_{m\to\infty}\sum_{1}^{m}\frac{\sin\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}=\lim_{m\to\infty}\sum_{1}^{m}\frac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}-\sin\frac{1}{n+1}\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\sum_{1}^{m}\left(tg\frac{1}{n}-tg\frac{1}{n+1}\right)=tg1$$

2. Используя формулу Тейлора, получим равенство

$$P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{P(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Очевидно, что при $x \ge a$, правая часть этого равенства строго положительна, следовательно все корни данного уравнения удовлетворяют неравенству $x < a$.

3. В качестве такой функции можно взять функцию вида $f(x) = \varphi(x) + x$, где $\varphi(x)$ произвольная непрерывная на вещественной оси и периодическая с периодом 1, например, $\varphi(x) = \sin 2\pi x$.

4. Будем считать, что неравенство $\frac{f(x^2)}{f(x)} \le \frac{q}{2x}$ выполнено для $x > a$ и $a > 1$. Рассмотрим функцию $\Phi(u) = \int_a^u f(x)dx, \quad u \ge a$, которая, очевидно, возрастает. Докажем ограниченность этой функции. Для этого в интеграле $\int_a^u f(x)dx$ сделаем замену переменной:

$\int_a^u f(x)dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{u}} f(t^2)2tdx \le q\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{u}} f(t)dt$.

Последний интеграл перепишем в виде

$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{u}} f(t)dt = \int_{\sqrt{a}}^{a} f(t)dt + \int_a^u f(t)dt + \int_u^{\sqrt{u}} f(t)dt$.

При $a > 1$ $\int_u^{\sqrt{u}} f(t)dt < 0$, поэтому $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{u}} f(t)dt \le \int_{\sqrt{a}}^{a} f(t)dt + \int_a^u f(t)dt$ и

$\int_a^u f(x)dx \le q\left(\int_{\sqrt{a}}^{a} f(t)dt + \int_a^u f(t)dt\right)$, откуда $\int_a^u f(x)dx \le \frac{q}{1-q}\int_{\sqrt{a}}^{a} f(x)dx$.

Следовательно, функция $\Phi(u)$ ограничена и существует $\lim\limits_{u\to\infty}\Phi(u) = \int_a^\infty f(x)dx$, а тогда сходится и интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$.

5. Перепишем уравнение в виде $y'' - 1 = xy' + y$ и затем в виде $(y' - x)' = (xy)'$, откуда, $y' - x = xy + c_1$. С учетом начальных условий, получаем $y' - x = xy$. Это уравнение – линейное. Решая его и учитывая еще одно из начальных условий получаем окончательный ответ $y = e^{x^2/2} - 1$.

6. Напишем формулы Тейлора для данной функции в точках $a = 0$ и $a = 1$ при $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{f^{(n)}(c_1)}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{и} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + \frac{f^{(n)}(c_2)}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Отсюда, $|f(0) - f(1)| = \left|\frac{f^{(n)}(c_1) \pm f^{(n)}(c_2)}{2^n n!}\right|$ или $\left|\frac{f^{(n)}(c_1) \pm f^{(n)}(c_2)}{2}\right| = 2^{n-1}n!|f(0) - f(1)|$.

Выполняется очевидное неравенство $\left|\frac{f^{(n)}(c_1) \pm f^{(n)}(c_2)}{2}\right| \le \max\left(\left|f^{(n)}(c_1)\right|, \left|f^{(n)}(c_2)\right|\right)$, из которого следует, что в качестве точки x можно взять ту из точек c_1 или c_2, в которой достигается максимум n-ой производной.

7. Если $\vec{a} = \vec{b} = \vec{0}$, то любой вектор $\vec{x}$ удовлетворяет уравнению; если $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b} \ne \vec{0}$, то можно положить $\vec{x} = \vec{b}$; если $\vec{a} \ne 0$, $\vec{b} = \vec{0}$, то равенство выполнено при $\vec{x} = \vec{a}$. Пусть $\overrightarrow{a \ne 0}$ и $\vec{b} \ne \vec{0}$. Уравнение равносильно следующему: $\vec{x} \times \left(\vec{a} \times \vec{x} - \vec{b}\right) = \vec{0}$,что эквивалентно коллинеарности векторов $\vec{x}$ и

$\vec{a}\times\vec{x}-\vec{b}$. Таким образом, если для некоторого числа λ уравнение $\lambda\vec{x}=\vec{a}\times\vec{x}-\vec{b}$ имеет ненулевое решение, то исходное уравнение также имеет ненулевое решение. Векторное уравнение $\lambda\vec{x}-\vec{a}\times\vec{x}=-\vec{b}$ равносильно системе из трех скалярных линейных уравнений с тремя неизвестными. Определитель этой системы есть многочлен третьей степени от λ и при некотором λ не равен нулю; для такого λ система является крамеровской и имеет единственное (очевидно, ненулевое) решение.

8. Рассмотрим $2\times n$ матрицу $\begin{pmatrix} a_1, a_2, ..., a_n \\ b_1, b_2, ..., b_n \end{pmatrix}$,

предполагая векторы-строки ортогональными: $a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=0$. Тогда удвоенная сумма квадратов 2×2 - миноров этой матрицы равна:

$$2\sum_{1\le k<l\le n}(a_kb_l-a_lb_k)^2=\sum_{k,l=1}^{n}(a_kb_l-a_lb_k)^2=\sum_{k,l=1}^{n}(a_k^2b_l^2+a_l^2b_k^2+2a_ka_lb_kb_l)=$$

$$\sum_{k,l=1}^{n}a_k^2b_l^2+\sum_{k,l=1}^{n}a_l^2b_k^2+2\sum_{k,l=1}^{n}a_ka_lb_kb_l=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{l=1}^{n}b_l^2+\sum_{l=1}^{n}a_l^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2=2(\sum_{k=1}^{n}a_k^2)(\sum_{l=1}^{n}b_l^2).$$

Соотношение $A^TA=E$ означает, что любые две различные строки матрицы A ортогональны, а сумма квадратов элементов любой строки равна 1. Применяя это соображение и проведенные вычисления, получаем, что искомая сумма равна числу различных пар строк A, то есть $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

9. Вначале докажем, что центр симметрии любого параллелограмма, вписанного в эллипс, совпадает с центром симметрии эллипса. Если сжать эллипс вдоль одной из осей так, чтобы получилась окружность, то параллелограмм перейдет в параллелограмм, а так как у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противоположных углов равна π, то этот параллелограмм будет прямоугольником. Следовательно, диагонали параллелограмма являются диаметрами окружности, а их точка пересечения центром окружности. Возвращаясь с помощью растяжения к исходному эллипсу, получаем нужное утверждение.

Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, его вершины являются точками пересечения с эллипсом взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через центр. Докажем, что такие точки являются вершинами ромба. Так как параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом, то достаточно доказать, что эти точки являются вершинами параллелограмма. Это следует из того факта, что точки симметричны относительно центра эллипса (так как относительно него симметричен эллипс и обе прямые).

Докажем, что все ромбы, вписанные в эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, описаны около одной и той же окружности.

Пусть прямые $y=kx,\ y=-\dfrac{1}{k}x$ - диагонали ромба $ABCD$. Решая системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\\ y = kx\end{cases},\qquad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\\ y = -\frac{1}{k}x\end{cases},$$

найдем координаты вершин ромба A,B,C,D:

$$x_{1,2}=\frac{\pm ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}},\ y_{1,2}=\frac{\pm kab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\qquad x_{3,4}=\frac{\pm kab}{\sqrt{k^2b^2+a^2}},\ y_{3,4}=\frac{\mp ab}{\sqrt{k^2b^2+a^2}}.$$

:

Отсюда

$$|OC| = \frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}, \quad |OD| = \frac{ab\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{a^2+k^2b^2}}$$

Следовательно, длина высоты OE, опущенной из центра O на сторону CD, равна

$$|OE| = \frac{|OC||OD|}{\sqrt{|OC|^2+|OD|^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Таким образом, радиус окружности, вписанной в произвольный ромб $ABCD$ равен $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Это означает, что открытый круг радиуса $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ с центром в точке O содержится во всех ромбах, вписанных в данный эллипс. Кроме того, любая точка вне открытого круга оказывается вне открытого ромба, стороной которого является хорда, касающаяся окружности . Окончательно, пересечением внутренностей всех ромбов, вписанных в эллипс с полуосями и , является внутренность круга с центром в центре эллипса и радиуса $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10. Воспользуемся индукцией по n. Случай $n=1$ очевиден. Проведем индуктивный переход от $n-1$ к n. Пусть в $\mathbb{R}^n$ нашлись $n+2$ вектора, попарно образующие тупые углы. Обозначим их $x_1, x_2, ..., x_{n+2}$. Проведем через $n-1$ векторов $x_4, x_5, ..., x_{n+2}$ $(n-1)$-мерное подпространство V. Два из трех оставшихся векторов x_1, x_2, x_3 лежат по одну сторону от V, пусть это будут x_1, x_2.

Обозначим через $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ ортогональные проекции векторов x_1, x_2 на V. По предположению индукции, среди $n+1$ векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}, x_4, x_5, ..., x_{n+2}$ найдутся два, образующие нетупой угол. Так как среди векторов $x_4, x_5, ..., x_{n+2}$ таких пар нет, то в пару, образующую нетупой угол, входит один из векторов $\overline{x_1}, \overline{x_2}$. Пусть сначала угол между $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ - нетупой. Покажем, что угол между x_1, x_2 - нетупой. Действительно, пусть $x_i = \overline{x_i} + y_i$, где $y_i \perp V$ $i=1,2$. Тогда $(x_1, x_2) = (\overline{x_1}, \overline{x_2}) + (y_1, y_2)$, т.к. $(\overline{x_i}, y_k) = 0$ в силу $\overline{x_i} \perp y_k$. Так как векторы x_1, x_2 лежат по одну сторону от V, то y_1, y_2 сонаправлены, так что $(y_1, y_2) \geq 0$. Но угол между $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ - нетупой, и $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \geq 0$. Следовательно, и $(x_1, x_2) \geq 0$, так что угол между x_1, x_2 - нетупой. Случай, когда нетупой угол образован вектором $\overline{x_1}$ или $\overline{x_2}$ с одним из векторов $x_4, x_5, ..., x_{n+2}$, фактически является частным случаем рассмотренного, так как мы не исключали ситуации $x_1 \in V$ или $x_2 \in V$. Тем самым пара векторов, образующих нетупой угол, найдется во всех случаях.