СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА С-ПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ (2005-2006 уч. г.)

1. Вычислить предел $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{m}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}}$

2. Пусть $P(x)$ - многочлен степени n и $P(a)\ge 0,\ P'(a)\ge 0,\ldots,P^{(n-1)}(a)\ge 0,P^{(n)}(a)>0$. Доказать, что вещественные корни уравнения $P(x)=0$ не превосходят *a*.

3. Указать какую-нибудь функцию, непрерывную на всей вещественной оси, отличную от линейной и удовлетворяющую условию $\forall x\in R\quad f(x+1)=f(x)+1$.

4. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[1,+\infty)$ и $\forall x\in[1,+\infty)\quad f(x)>0$. Пусть также на любом конечном промежутке $[a,b],\quad 1\le a<b$ функция $f(x)$ интегрируема. Доказать, что, если для достаточно больших значений x выполняется неравенство $\dfrac{f(x^2)}{f(x)}\le\dfrac{q}{2x}$, где $q<1$, то интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ сходится.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''=xy'+y+1$ при условиях $y(0)=y'(0)=0$.

6. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема n раз на промежутке $[0,1]$ и $f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1)=0$ для $k=1,2,\ldots,n-1$. Докажите, что существует $x\in[0,1]$, для которого выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|\ge n!2^{n-1}\left|f(0)-f(1)\right|\cdot$

7. Доказать, что векторное уравнение $\vec{x}\times\left(\vec{a}\times\vec{x}\right)+\vec{b}\times\vec{x}=\vec{0}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет ненулевое решение.

8. Найти сумму квадратов всех миноров порядка 2 ортогональной матрицы порядка n.

9. Найти пересечение внутренностей всех ромбов, вписанных в данный эллипс.

10. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ не существуют $n+2$ вектора, попарно образующие тупые углы.