СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ (2006-2007 уч. г.)

1. Найти все бесконечно дифференцируемые функции $f : R \to R$, удовлетворяющие тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.

Решение. При $x = y = 0$ тождество дает $f(0) = 2f(0)$, т.е. $f(0) = 0$.

Из тождества $f(x+y) - f(x) = f(y) + 2xy$ имеем

$$f'(x) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{f(y) + 2xy}{y} = 2x + \lim_{y\to 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = 2x + f'(0).$$

Поэтому искомая функция обязана удовлетворять условию

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)\,dy = \int_0^x \left(2y + f'(0)\right) dy = x^2 + f'(0)x.$$

Производная $f'(0)$ может принимать произвольное значение. В этом убеждаемся, проверяя, что при любом $a \in R$ функция $f(x) = x^2 + ax$ удовлетворяет заданному тождеству.

2. Используя равенство $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-px^2 - \frac{q}{x^2}} dx$.

Решение.

Обозначим $I = \int_0^{+\infty} e^{-px^2 - \frac{q}{x^2}} dx.$ Сделав в этом интеграле подстановку $\sqrt{\frac{q}{p}}\frac{1}{x} = y$, получим:

$I = \sqrt{\frac{q}{p}} \int_0^{+\infty} e^{-py^2 - \frac{q}{y^2}} \frac{dy}{y^2}.$ Сложив эти два равенства для I, имеем

$$2I = \int_0^{\infty} e^{-py^2 - \frac{q}{y^2}} \left(1 + \sqrt{\frac{q}{p}} \cdot \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\infty} e^{-py^2 - \frac{q}{y^2}} \left(\sqrt{p} + \frac{\sqrt{q}}{y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-2\sqrt{pq}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\sqrt{p}y - \frac{\sqrt{q}}{y}\right)^2} \left(\sqrt{p}y - \frac{\sqrt{q}}{y}\right)' dy \;= \left[\sqrt{p}y - \frac{\sqrt{q}}{y} = t\right] = \frac{e^{-2\sqrt{pq}}}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{pq}}.$$

Поэтому $I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-2\sqrt{pq}}.$

3. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $f''(x) \le 0$ на $[a,b]$ и $f(a) = f(c) = f(b)$ для некоторой точки $c \in (a,b)$. Доказать, что функция $f(x)$ является константой на $[a,b]$.

Решение. По теореме Ролля существуют точки $\xi_1 \in (a,c)$, $\xi_2 \in (c,b)$ такие, что $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$. Так как, по условию, $f''(x) \le 0$, то функция $f'(x)$ является невозрастающей на $[a,b]$, откуда следует, что $f'(x) \equiv 0$ на промежутке $[\xi_1, \xi_2]$, $f'(x) \ge 0$ на $[a, \xi_1]$ и $f'(x) \le 0$ на $[\xi_2, b]$. Значит функция $f(x)$ не убывает на $[a, \xi_1]$ и не возрастает на $[\xi_2, b]$. Так как $f(a) = f(c) = f(b)$ и $c \in [\xi_1, \xi_2]$, то $f(x) \equiv const$.

4. Вещественные числа $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots x_n$ удовлетворяют неравенству $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$. Доказать, что $x_0 + \dfrac{1}{x_0 - x_1} + \dfrac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_{n-1} - x_n} \ge x_n + 2n$.

Решение. Представим разность $x_0 - x_n$ в виде $x_0 - x_n = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \ldots + (x_{n-1} - x_n)$. Тогда, используя неравенство $a + \dfrac{1}{a} \ge 2,\ \ a > 0$, получим

$$x_0 - x_1 + \frac{1}{x_0 - x_1} + x_1 - x_2 + \frac{1}{x_1 - x_2} + \ldots + x_{n-1} - x_n + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \ge 2n.$$

5. Исследовать на выпуклость функцию $f(x) = x^2 + x(1-x)\ln(1-x)$ на промежутке (-1,0).

Решение. Разложим функцию в ряд Маклорена. Получим $f(x) = \sum\limits_1^{\infty} \dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)}$, причем на данном промежутке ряд сходится и его можно почленно дифференцировать. Дифференцируя ряд два раза, получим $f''(x) = \sum\limits_1^{\infty} \dfrac{n+2}{n} x^n$. На данном промежутке ряд для второй производной является рядом Лейбница и, следовательно, в каждой точке этого промежутка знак $f''(x)$ совпадает со знаком первого члена ряда, т.е. $f''(x) < 0$. Значит, функция на данном промежутке выпукла вверх.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + (x-1)y' - y = 0$.

Решение. Перегруппируем члены уравнения следующим образом $x(y'' + y') - (y' + y) = 0$. Обозначим $y' + y = z$. Тогда $xz' - z = 0$ - уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим $z = C_1 x$ или $y' + y = C_1 x$. Решая последнее уравнение, как линейное уравнение первого порядка, получим окончательный ответ $y = C_1(x-1) + C_2 e^{-x}$.

7. Какое множество на комплексной плоскости может задавать уравнение $\dfrac{z^2}{a^2} + \dfrac{\bar{z}^2}{b^2} = 1$ в зависимости от значений параметров $a > 0,\quad b > 0$?

Решение. Пусть $z = x + iy$. Тогда $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$.

Следовательно $\frac{z^2}{a^2} + \frac{\bar{z}^2}{b^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(x^2 - y^2\right) + 2i\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)xy = 1$, откуда

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)xy = 0 \\ \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\left(x^2 - y^2\right) = 1 \end{cases}.$$

При $a \neq b$ решения этой системы уравнений задают две точки плоскости с координатами $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$. При $a = b$ уравнение $z^2 + \bar{z}^2 = a^2$ задает на плоскости гиперболу $\left(x^2 - y^2\right) = \frac{a^2}{2}$.

8. Пусть $h(x) > 0, \quad x \in [a; b]$ и $h_n = \int\limits_a^b x^n \, h(x)\, dx.$ Доказать, что $\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} \neq 0.$

Решение. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} c_0 h_0 + c_1 h_1 + c_2 h_2 = \int_a^b h(x)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)dx = 0, \\ c_0 h_1 + c_1 h_2 + c_2 h_3 = \int_a^b h(x)\, x\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)dx = 0, \\ c_0 h_2 + c_1 h_3 + c_2 h_4 = \int_a^b h(x)\, x^2\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)dx = 0. \end{cases}$$

Домножив первое уравнение на c_0, второе – на c_1, третье – на c_2 и сложив, получим $\int_a^b h(x)\left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right)^2 dx = 0$. Отсюда $c_0 = c_1 = c_2 = 0$, и поскольку однородная система имеет только тривиальное решение, ее определитель отличен от нуля.

9. Пусть X – квадратная матрица порядка n. Рассмотрим ее определитель как функцию n^2 переменных x_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$ – элементов этой матрицы.

а) Пусть $y_{ij}(X) = \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \det X, \quad Y = \left\| y_{ij} \right\|, (i, j = 1, ..., n).$ Найти произведение $Y \cdot X$.

б) Вычислить повторный интеграл по всем переменным $\int\limits_0^1 dx_{11}\int\limits_0^1 dx_{12}...\int\limits_0^1 \det X\,dx_{nn}$.

Решение.

а) Заметим, что $y_{ij}(X)=\dfrac{\partial}{\partial x_{ji}}\det X$ - алгебраическое дополнение элемента x_{ji}. Поэтому $Y\cdot X=\sum\limits_{k=1}^{n} y_{ik}x_{kj}=\begin{cases}0, & если\ \ i\neq j\\ \det X, & если\ \ i=j\end{cases}$, то есть , $Y\cdot X=\det X\cdot I$, где I - единичная матрица.

б) Последовательным интегрированием получаем $\int\limits_0^1 dx_{11}\int\limits_0^1 dx_{12}...\int\limits_0^1 \det X\,dx_{nn}=\det\left(\int\limits_0^1 x_{ij}\,dx_{ij}\right)=\det\left\|a_{ij}\right\|$, где $a_{ij}=\dfrac{1}{2}$ для всех $i,j=1,...,n$. Следовательно $\det\left\|a_{ij}\right\|$=0.

10. Вершины параллелограмма имеют целые координаты, его площадь равна 3. Известно, что внутри параллелограмма (стороны исключаются) есть две точки с целыми координатами. Доказать, что эти точки лежат на одной из диагоналей и делят ее на три равные части.

Решение. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – векторы, соединяющие одну из вершин со смежными. Тогда диагонали равны $\vec{a}\pm\vec{b}$. Предположим сначала, что один из векторов (например, $\vec{a}$) имеет координаты, кратные 3. Тогда матрица B, строки которой состоят из координат векторов $\frac{1}{3}\vec{a}$, $\vec{b}$ имеет определитель ±1. Из правила построения обратной матрицы следует, что B^{-1} – тоже целочисленная матрица. Линейное преобразование $\vec{v}\to B\vec{v}$ переводит на себя множество векторов с целыми координатами, а параллелограмм – в прямоугольник с вершинами в точках (0,0), (3,0), (0,1), (3,1) (с точностью до перестановки координат). Внутри такого прямоугольника целых точек нет, откуда следует, что предположение неверно. Таким образом, ни один из векторов не обладает координатами, кратными 3. Это значит, что матрица, составленная из остатков (0, ±1) от деления координат векторов на 3, не имеет нулевой строки. Поскольку определитель такой матрицы должен делиться на 3, он равен нулю. Поэтому строки должны быть пропорциональны; ясно, что коэффициент пропорциональности равен ±1. Поэтому либо $\vec{a}+\vec{b}$, либо $\vec{a}-\vec{b}$ имеет координаты, кратные 3, что и доказывает утверждение задачи.