СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ (2006-2007 уч. г.)

1. Найти все бесконечно дифференцируемые функции $f: R \to R$, удовлетворяющие тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.

2. Используя равенство $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-px^2 - \frac{q}{x^2}} dx$.

3. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $f''(x) \le 0$ на $[a,b]$ и $f(a) = f(c) = f(b)$ для некоторой точки $c \in (a,b)$. Доказать, что функция $f(x)$ является константой на $[a,b]$.

4. Вещественные числа $x_0,\ x_1,\ x_2, \dots x_n$ удовлетворяют неравенству $x_0 > x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Доказать, что $x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \dots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \ge x_n + 2n$.

5. Исследовать на выпуклость функцию $f(x) = x^2 + x(1-x)\ln(1-x)$ на промежутке $(-1, 0)$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'' + (x-1)y' - y = 0$.

7. Какое множество на комплексной плоскости может задавать уравнение $\frac{z^2}{a^2} + \frac{(\bar{z})^2}{b^2} = 1$ в зависимости от значений параметров $a > 0, \quad b > 0$?

8. Пусть $h(x) > 0, \quad x \in [a;b]$ и $h_n = \int_a^b x^n\, h(x)\, dx.$ Доказать, что $\begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \\ h_1 & h_2 & h_3 \\ h_2 & h_3 & h_4 \end{vmatrix} \ne 0.$

9. Пусть X – квадратная матрица порядка n. Рассмотрим ее определитель как функцию n^2 переменных $x_{ij}\ (i, j = 1, \dots, n)$ – элементов этой матрицы.

а) Пусть $y_{ij}(X) = \frac{\partial}{\partial x_{ji}} \det X, \quad Y = \|y_{ij}\|, (i, j = 1, \dots, n).$ Найти произведение $Y \cdot X$.

б) Вычислить повторный интеграл по всем переменным $\int_0^1 d\,x_{11} \int_0^1 d\,x_{12} \dots \int_0^1 \det X\, d\,x_{nn}$.

10. Вершины параллелограмма имеют целые координаты, его площадь равна 3. Известно, что внутри параллелограмма (стороны исключаются) есть две точки с целыми координатами. Доказать, что эти точки лежат на одной из диагоналей и делят ее на три равные части.