СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2007 г. (решения задач)

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cos 2x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\frac{2\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}{\cos 2x}}=e^{3/2}$$

2. Исследовать ряд на сходимость, если общий член ряда $a_n=\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\dfrac{\cos^2 x}{x}dx$.

Решение.

Общий член ряда положителен. Оценим его снизу. Для этого в интеграле сделаем замену $t=x-\pi n \iff x=t+\pi n$. Получим $a_n=\int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi}\dfrac{\cos^2 x}{x}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{\cos^2 t}{t+\pi n}dt>\dfrac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos^2 t dt=\dfrac{1}{2n}$. Ряд расходится.

3. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$ и имеет конечный предел при $x\to+\infty$. Доказать, что она ограничена.

Решение.

Обозначим $A=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$. Тогда $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\sigma>0\ \ \forall x\geq\sigma\ \ A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$. Таким образом на промежутке $[\sigma,+\infty)$ функция ограничена.

На промежутке $[a,\sigma]$ функция будет ограничена по теореме Вейерштрасса. Обозначим через C и c ее верхнюю и нижнюю границы на этом промежутке, соответственно. Тогда, если положить $M=\max(C,A+\varepsilon),\quad m=\min(c,A-\varepsilon)$, то для всех значений $x\in[a,+\infty)$ будет выполняться неравенство $m\leq f(x)\leq M$, что и требовалось доказать.

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)...\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

Решение.

Обозначим $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)....\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

Тогда $\ln a_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

По известному неравенству $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\quad x>0$ получим

$$\frac{k}{n^2+n}<\frac{k}{n^2+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{n^2},\text{ откуда }\frac{\sum\limits_1^n k}{n^2+n}<\sum_1^n\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{\sum\limits_1^n k}{n^2}.$$

Перейдем к пределу справа и слева, учитывая, что $\sum\limits_1^n k=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=1/2$ и искомый предел равен $e^{1/2}$.

5. Все корни многочлена $P(x)=x^n+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+...+a_n$ вещественны. Доказать, что $a_2\le 0$.

Решение.

Если все корни многочлена вещественны, то по теореме Ролля корни каждой производной этого многочлена тоже вещественны. Тогда корни $(n-2)$ производной тоже вещественны.

Эта производная равна $\frac{n!}{2}x^2+(n-2)!\cdot a_{n-2}$ и имеет вещественные корни только если $a_{n-2}\le 0$.

6. Решить уравнение $y-xy'=y^2\cdot y''$.

Решение.

Разделим обе части уравнения на y^2: $\frac{y-xy'}{y^2}=y''$

Левая часть уравнения представляет собой производную: $\frac{y-xy'}{y^2}=\left(\frac{x}{y}\right)'$ и уравнение

принимает вид $\left(\frac{x}{y}\right)'=y''$. Интегрируя последнее, получим $y'=\frac{x}{y}+C$.

Это однородное уравнение, которое подстановкой $t=\frac{y}{x}$ приводится к уравнению

$\frac{tdt}{1+Ct-t^2}=\frac{dx}{x}$. После интегрирования и упрощения получим

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+Cxy-4y^2}}\left(\frac{2y+x\left(\sqrt{C^2+4}-C\right)}{2y-x\left(\sqrt{C^2+4}-C\right)}\right)^{C/\sqrt{C^2+4}}=C_1x$$

7. Доказать формулу $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(n)}=\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n\cdot\cos\left(y+\frac{\pi n}{2}\right)dy$.

Решение.

Воспользуемся методом математической индукции.

При $n=1$ имеем $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2}$ и

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x y\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)dy=\frac{1}{x^2}\left(y\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right)\Bigg|_0^x=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

Допустим, что формула верна для $n=m$. Тогда для $n=m+1$ получим

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(m+1)}=-\frac{m+1}{x^{m+2}}\int_0^x y^m\cdot\cos\left(y+\frac{\pi m}{2}\right)dy+\frac{x^m\cos\left(x+\frac{\pi m}{2}\right)}{x^{m+1}}.$$

Интеграл в правой части равенства возьмем по частям, полагая $u=\cos\left(y+\frac{\pi m}{2}\right),\quad dv=y^m$.

Тогда $\int_0^x y^m\cdot\cos\left(y+\frac{\pi m}{2}\right)dy=\frac{x^{m+1}\cos\left(x+\frac{\pi m}{2}\right)}{m+1}-\frac{1}{m+1}\int_0^x y^{m+1}\cos\left(y+\frac{\pi(m+1)}{2}\right)$ и, после вычислений получим

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(m+1)}=-\frac{m+1}{x^{m+2}}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\cos\left(x+\frac{\pi m}{2}\right)-\frac{1}{m+1}\int_0^x y^{m+1}\cdot\cos\left(y+\frac{\pi(m+1)}{2}\right)dy\right)+\frac{\cos\left(x+\frac{\pi m}{2}\right)}{x}=$$

$$=\frac{1}{x^{m+1}}\int_0^x y^{m+1}\cdot\cos\left(y+\frac{\pi(m+1)}{2}\right)dy$$

что и требовалось доказать.

8. Площадь трапеции равна 2, а сумма диагоналей равна 4. Найти высоту трапеции.

Решение. Обозначим через d_1 и d_2 длины диагоналей трапеции, а угол между ними через α. В этом случае площадь трапеции равна

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha\le\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2\sin\alpha\le\frac{(d_1+d_2)^2}{8}=2.$$

Так как площадь в точности равна 2, то в приведенном нестрогом неравенстве имеет место равенство. Отсюда находим, что $d_1=d_2=2,\quad \sin\alpha=1,\quad \alpha=\pi/2$. Высота трапеции, как нетрудно заметить, является одновременно стороной в треугольнике, две стороны которого равны d_1 и d_2, а угол между ними равен α. Отсюда получаем, что высота равна $\sqrt{2}$.

9. Пусть α,β,γ - корни уравнения $x^3+px+q=0$. Вычислить определитель $\Delta=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\gamma&\alpha&\beta\\\beta&\gamma&\alpha\end{pmatrix}$.

Решение. Вычисляя в явном виде определитель третьего порядка Δ, имеем:

$$\Delta=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma.$$

Заметим, что куб суммы $(\alpha+\beta+\gamma)^3$ возможно представить в виде

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-3\alpha\beta\gamma.$$

Указанное равенство получается раскрытием скобок в выражении $(\alpha+\beta+\gamma)^3$, прибавлением и вычитанием произведения $3\alpha\beta\gamma$ и последующей группировкой (проделайте самостоятельно). Поэтому Δ имеет вид:

$$\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left((\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right).$$

Но по теореме Виета для кубического уравнения $x^3+px+q=0$ сумма его корней $\alpha+\beta+\gamma=0$. В результате получаем: $\Delta=0$.

10. Пусть X - линейное пространство над полем вещественных чисел, $\dim X=10$, L_1 и L_2 - подпространства X, причем $L_1\subset L_2$, $\dim L_1=3$, $\dim L_2=6$. Пусть Y - линейное пространство всех линейных преобразований $A:X\to X$, для которых L_1 и L_2

являются инвариантными (подпространство L_1 линейного пространства X называется инвариантным относительно линейного преобразования $A: X \to X$, если действие этого преобразования не выводит из L_1, т.е. $A(L_1) \subset L_1$). Найти размерность пространства Y.

Решение. $\dim Y = 67$. Для обоснования ответа достаточно рассмотреть $\{e_1, e_2, ..., e_{10}\}$- такой базис пространства X, что $\{e_1, e_2, e_3\}$- базис в L_1, а $\{e_1, e_2, ..., e_6\}$- базис в L_2. В этом базисе матрица любого преобразования A из пространства Y имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\dim Y = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 10 = 67$.

11. Сколько компонент связности содержит дополнение в $\mathbb{R}^4$ к конусу $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\}$? (Две точки считаются принадлежащими одной компоненте связности, если их можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с *M*.).

Решение. Две: $x_1^2 + x_2^2 < x_3^2 + x_4^2$ и $x_1^2 + x_2^2 > x_3^2 + x_4^2$. Ясно, что нельзя соединить ломаной точки двух множеств, не пересекая *M*. Докажем, что две точки первого из указанных множеств M_1 можно соединить ломаной, целиком лежащей в M_1 (для второго множества доказательство аналогично). Если $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M_1$ и $x' = (x_1', x_2', x_3', x_4') \in M_1$, то мы соединяем отрезком точки (x_1, x_2, x_3, x_4) и $(0, 0, x_3, x_4)$; затем в плоскости $x_1 = x_2 = 0$ соединяем точки $(0, 0, x_3, x_4)$ и $(0, 0, x_3', x_4')$ ломаной, не проходящей через нуль, и, наконец, проводим отрезок, соединяющий точки $(0, 0, x_3', x_4')$ и (x_1', x_2', x_3', x_4'). Получим ломаную, соединяющую x и x' и целиком лежащую в M_1.