СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2007 г.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{1/x^2}$.

2. Исследовать ряд на сходимость, если общий член ряда $a_n = \int\limits_{\pi n}^{\pi n+\pi} \dfrac{\cos^2 x}{x}\,dx$.

3. Функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,+\infty)$ и имеет предел при $x \to +\infty$. Доказать, что она ограничена.

4. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

5. Все корни многочлена $P(x) = x^n + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_n$ вещественны. Доказать, что $a_2 \le 0$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения $y - xy' = y^2 \cdot y''$.

7. Доказать формулу $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{(n)} = \dfrac{1}{x^{n+1}}\int_0^x y^n \cdot \cos\left(y + \dfrac{\pi n}{2}\right) dy$.

8. Площадь трапеции равна 2, а сумма диагоналей равна 4. Найти высоту трапеции.

9. Пусть α, β, γ - корни уравнения $x^3 + px + q = 0$. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$.

10. Пусть X - линейное пространство над полем вещественных чисел, $\dim X = 10$, L_1 и L_2 - подпространства X, причем $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Пусть Y - линейное пространство всех линейных преобразований $A: X \to X$, для которых L_1 и L_2 являются инвариантными (подпространство L_1 линейного пространства X называется инвариантным относительно линейного преобразования $A: X \to X$, если действие этого преобразования не выводит из L_1, т.е. $A(L_1) \subset L_1$). Найти размерность пространства Y.

11. Сколько компонент связности содержит дополнение в $\mathbb{R}^4$ к конусу $M = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2\right\}$? (Две точки считаются принадлежащими одной компоненте связности, если их можно соединить ломаной, не имеющей общих точек с M.).