СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2007/2008 уч.г. (II тур)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. На чудо-дереве растет 2179 бананов и 1956 ананасов. За один раз с него можно сорвать ровно два фрукта. Если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 ананас, если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастает 1 банан. Какой фрукт останется на дереве последним?
   Решение. При указанной стратегии четность числа ананасов не изменяется. Так как их исходное количество четно, то на последнем шаге станется 0 ананасов и, следовательно, один банан.

2. Пусть $x_0=1,\quad x_1=2,\quad x_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x_{n-1}+\dfrac{1}{n}x_{n-2}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

   Решение. Из рекуррентной формулы следует: $x_n-x_{n-1}=-\dfrac{1}{n}\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)=\dfrac{(-1)^n}{n!}\left(x_1-x_0\right)=\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

   Тогда $x_n=x_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(x_k-x_{k-1}\right)=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^n}{n!}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=e^{-1}$.

3. Найти все функции, удовлетворяющие уравнению $f(x)=2\int_0^x\dfrac{2t+1}{(2x+1)^2}f(t)\,dt+1$

   Решение. Продифференцируем данное равенство по переменной x:
   $$f'(x)=2\frac{2x+1}{(2x+1)^2}f(x)-\frac{8}{(2x+1)^3}\int_0^x(2t+1)f(t)\,dt=\frac{2f(x)}{2x+1}-\frac{8}{(2x+1)^3}\int_0^x(2t+1)f(t)\,dt.$$

   Из данного соотношения получим равенство: $\dfrac{2}{(2x+1)^2}\int_0^x(2t+1)f(t)\,dt=f(x)-1$, откуда

следует, что искомая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению:
$$f'(x)=\frac{2f(x)}{2x+1}-\frac{4}{2x+1}\left(f(x)-1\right)=-\frac{2f(x)}{2x+1}+\frac{4}{2x+1}.$$
Полученное уравнение является линейным уравнением первого порядка и его общим решением будет семейство функций $f(x)=\dfrac{4x+C}{2x+1}$.
Из данного интегрального уравнения, подстановкой $x=0$, получим начальное условие для нашего дифференциального уравнения: $f(0)=1$. Используя его, получаем окончательный ответ
$$f(x)=\frac{4x+1}{2x+1}.$$

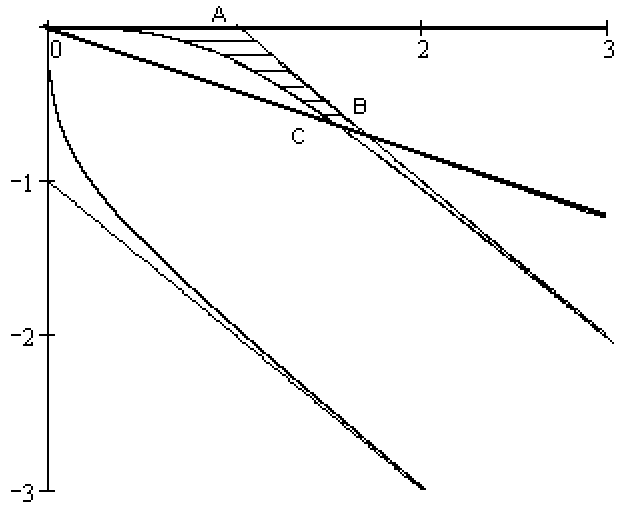
4. Вычислить площадь фигуры между кривой $\left(x^2-y^2\right)^2+4xy=0$, ее асимптотой и лучами $\varphi=-\dfrac{\pi}{8}$ и $\varphi=0$.

   Решение. Введем параметр по формуле $y=xt$. Тогда параметрические уравнения данной кривой будут иметь вид $x=\pm\dfrac{2\sqrt{-t}}{1-t^2},\quad y=\pm\dfrac{2t\sqrt{-t}}{1-t^2},\quad t\le 0,\ t\ne -1$. Знаки при этих дробях выбираются одинаковыми.

   Вычислим параметры асимптот: $k=\lim\limits_{t\to-1}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{t\to-1}t=-1$ и

   $b_1=\lim\limits_{t\to-1+0}(y-kx)=\lim\limits_{t\to-1+0}\pm\dfrac{2\sqrt{-t}\,(t+1)}{1-t^2}=\pm1$ или $b_1=\lim\limits_{t\to-1-0}(y-kx)=\lim\limits_{t\to-1+0}\pm\dfrac{2\sqrt{-t}\,(t+1)}{t^2-1}=\pm1$.

   Таким образом, кривая имеет две асимптоты $y=-x+1$ и $y=-x-1$.



Площадь между данными кривыми вычислим как разность между площадью треугольника OAB и площадью криволинейной фигуры между кривой и лучом $\varphi = -\frac{\pi}{8}$.

Площадь треугольника равна $S_1 = \frac{1}{2} OA \cdot OB \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}} = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Площадь между кривой и лучом вычислим в полярных координатах:

$S_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/8}^{0} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = -\int_{-\pi/8}^{0} \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Искомая площадь равна $S_1 - S_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$.

5. Доказать неравенство $1 \le \frac{1+ax^{a+1}}{(a+1)x^a} \le 1 + \frac{a(1-x)^2}{2x^a} \qquad (a \ge 1,\ \ 0 < x \le 1)$.

Решение. Умножим неравенство на x^a: $x^a \le \frac{1+ax^{a+1}}{(a+1)} \le x^a + \frac{a(1-x)^2}{2}$.

Пусть $f(x) = x^a$, $g(x) = \frac{1+ax^{a+1}}{a+1}$, $h(x) = x^a + \frac{a(1-x)^2}{2}$. Производные от этих функций на данном промежутке связаны неравенством $f'(x) \le g'(x) \le h'(x)$. Интегрируя эти неравенства на промежутке $[x,1]$, получим $f(1) - f(x) \le g(1) - g(x) \le h(1) - h(x)$. Если учесть, что $f(1) = g(1) = h(1) = 1$, получаем требуемое.

6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{i \cdot j}{i+j}$.

Решение. Перепишем данное выражение в виде $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{n^2}\frac{\frac{i}{n}\frac{j}{n}}{\frac{i}{n}+\frac{j}{n}}$, из которого видно, что оно представляет собой интегральную сумму для двойного интеграла $\iint\limits_D \frac{xy}{x+y}\,dxdy$, где D - квадрат $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$. Так как интеграл существует, предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения и выбора промежуточных точек и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{i\cdot j}{i+j}=\iint_D\frac{xy}{x+y}dxdy=\frac{2}{3}(1-\ln 2).$$

7. Все элементы матрицы $\mathbf{A}$ размера $[10\times 10]$ - целые числа. Известно, что у 92-х из них остаток от деления на 3 равен 1. Доказать, что $\det\mathbf{A}$ делится на 3.

Решение: Чисел, о делимости которых нам ничего неизвестно, всего 8 штук. Это означает, что они располагаются не более, чем в 8 строчках матрицы, т. е. найдется по крайней мере 2 строчки, все элементы которых равны $1\pmod 3$. Вычтем из одной такой строчки другую и получим строчку, все элементы которой равны $0\pmod 3$. Следовательно, при вычислении определителя из получившейся строчки можно вынести 3 как общий множитель, т.е. $\det\mathbf{A}$ делится на 3.

8. Существует ли ортогональное преобразование f плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S\subset\mathbb{R}^2$ такие, что $f(S)\subset S$ и $f(S)\neq S$?

Решение: Да. Например: пусть f - поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг точки O на угол $\pi\sqrt{2}$. Пусть $A_0\neq O$ - произвольная точка, $A_n=f(A_{n-1})$ при $n\in\mathbb{N}$. Тогда $A_n\neq A_m$ при $n\neq m$, т.к. число $n\sqrt{2}-m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S=\{A_0,A_1,\ldots\}$, тогда $f(S)=\{A_1,A_2,\ldots\}$, но $f(S)\neq S$.

9. Элементами квадратной матрицы $\mathbf{A}$ являются полиномы от комплексной переменной z. Для любого z матрица $\mathbf{A}(z)$ обратима. Что можно сказать об элементах обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}(z)$?

Решение: Элементами обратной матрицы $\mathbf{A}$ также являются полиномы от комплексной переменной z. Понятно, что $\det\mathbf{A}(z)$ - также полином. По условию, для $\forall z\ \exists\ \mathbf{A}^{-1}(z)\Leftrightarrow\forall z\ \det\mathbf{A}(z)\neq 0$. Но по основной теореме алгебры любой полином (с учетом кратности) имеет n корней в поле комплексных чисел. Поэтому $\det\mathbf{A}(z)$ - полином нулевого порядка, т.е. $\det\mathbf{A}(z)=\mathrm{const}$. По формуле, выражающей обратную матрицу через алгебраические дополнения, $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$. Но A_{ij} - также полиномы, что и завершает доказательство.

10. Пусть $x,\ \varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ - элементы евклидова пространства, $c_1,c_2,\ldots,c_n$ - произвольные вещественные числа. Доказать неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(x,\varphi_i)\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)\cdot(x,x)\cdot\left(\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|(\varphi_i,\varphi_j)\right|\right).$$

Решение:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}c_i(x,\varphi_i)\right)^2=\left(x,\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i\right)^2\leq(x,x)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i,\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j\right)=(x,x)\cdot\sum_{i,j=1}^{n}c_ic_j(\varphi_i,\varphi_j)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\cdot(x,x)\cdot\sum_{i,j=1}^{n}\left(c_i^2+c_j^2\right)\cdot\left|(\varphi_i,\varphi_j)\right|\leq\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^2\right)\cdot(x,x)\cdot\left(\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\left|(\varphi_i,\varphi_j)\right|\right).$$