СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2007/2008 уч.г. (II тур)

1. На чудо-дереве растет 2179 бананов и 1956 ананасов. За один раз с него можно сорвать ровно два фрукта. Если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 ананас, если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастает 1 банан. Какой фрукт останется на дереве последним?
2. Пусть $x_0 = 1,\ \ x_1 = 2,\ \ \ x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. Найти все непрерывные функции, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 2 \cdot \int\limits_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} f(t)\,dt + 1$.
4. Вычислить площадь фигуры между кривой $\left(x^2 - y^2\right)^2 + 4xy = 0$, ее асимптотой и лучами $\varphi = -\frac{\pi}{8}$ и $\varphi = 0$.
5. Доказать неравенство $1 \le \frac{1 + ax^{a+1}}{(a+1)x^a} \le 1 + \frac{a(1-x)^2}{2x^a}$ $\quad (a \ge 1,\ \ 0 < x \le 1)$.
6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{i \cdot j}{i+j}$.
7. Все элементы матрицы $\mathbf{A}$ размера $[10 \times 10]$ - целые числа. Известно, что у 92-х из них остаток от деления на 3 равен 1. Доказать, что $\det \mathbf{A}$ делится на 3.
8. Существует ли ортогональное преобразование f плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset S$ и $f(S) \ne S$?
9. Элементами квадратной матрицы $\mathbf{A}$ являются полиномы от комплексной переменной z. Для любого z матрица $\mathbf{A}(z)$ обратима. Что можно сказать об элементах обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}(z)$?
10. Пусть $x,\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ - элементы евклидова пространства, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - произвольные вещественные числа. Доказать неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i (x, \varphi_i)\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^2 \cdot (x,x) \cdot \left(\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|(\varphi_i, \varphi_j)\right|\right).$$

СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2007/2008 уч.г. (II тур)

1. На чудо-дереве растет 2179 бананов и 1956 ананасов. За один раз с него можно сорвать ровно два фрукта. Если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 ананас, если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастает 1 банан. Какой фрукт останется на дереве последним?
2. Пусть $x_0 = 1,\ \ x_1 = 2,\ \ \ x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2}$. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
3. Найти все непрерывные функции, удовлетворяющие уравнению $f(x) = 2 \cdot \int\limits_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} f(t)\,dt + 1$.
4. Вычислить площадь фигуры между кривой $\left(x^2 - y^2\right)^2 + 4xy = 0$, ее асимптотой и лучами $\varphi = -\frac{\pi}{8}$ и $\varphi = 0$.
5. Доказать неравенство $1 \le \frac{1 + ax^{a+1}}{(a+1)x^a} \le 1 + \frac{a(1-x)^2}{2x^a}$ $\quad (a \ge 1,\ \ 0 < x \le 1)$.
6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{i \cdot j}{i+j}$.
7. Все элементы матрицы $\mathbf{A}$ размера $[10 \times 10]$ - целые числа. Известно, что у 92-х из них остаток от деления на 3 равен 1. Доказать, что $\det \mathbf{A}$ делится на 3.
8. Существует ли ортогональное преобразование f плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset S$ и $f(S) \ne S$?
9. Элементами квадратной матрицы $\mathbf{A}$ являются полиномы от комплексной переменной z. Для любого z матрица $\mathbf{A}(z)$ обратима. Что можно сказать об элементах обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}(z)$?
10. Пусть $x,\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ - элементы евклидова пространства, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - произвольные вещественные числа. Доказать неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i (x, \varphi_i)\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)^2 \cdot (x,x) \cdot \left(\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left|(\varphi_i, \varphi_j)\right|\right).$$