# СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2009 г. (решения задач)

1. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)$.

**Решение**. Приведем данную разность к дроби $\dfrac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x=\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{\pi}{\operatorname{tg}\pi x}=\dfrac{\operatorname{tg}\pi x-\pi\ln x}{\ln x\operatorname{tg}\pi x}$ и дважды применим правило Лопиталя. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{tg}\pi x-\pi\ln x}{\ln x\operatorname{tg}\pi x}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\pi}{\cos^2\pi x}-\dfrac{\pi}{x}}{\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x}+\dfrac{\pi\ln x}{\cos^2\pi x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi\left(x-\cos^2\pi x\right)}{\dfrac{1}{2}\sin 2\pi x+\pi x\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi\left(1-\sin 2\pi x\right)}{\pi\cos 2\pi x+\pi\ln x+\pi}=\frac{1}{2}$$

2. *Найти площадь многоугольника, координаты вершин которого находятся из решения уравнения:* $\sum\limits_{k=1}^{x}k!=y^2$ *в целых числах.*

**Решение.** Легко заметить, что $x=1,\ y=\pm 1$ и $x=3,\ y=\pm 3$ удовлетворяют уравнению. При $x=2$ и при $x=4$ уравнение решений не имеет. Если $x\ge 5$, то уравнение можно переписать как $1!+2!+3!+4!+5!+...+x!=33+5!+...+x!=y^2$. Очевидно, что $5!+...+x!\,\vdots\,5$.

Можно легко показать, что $y^2=\left[\begin{array}{l}0\\1\\4\end{array}\right.\pmod 5$, тогда как $33=3\pmod 5$. Т.е. левая часть при делении на 5 даёт в остатке 3, а правая либо 0, либо 1, либо 4, следовательно, равенство невозможно, т.е. при $x\ge 5$ уравнение не имеет решений в целых числах. А тогда нужно лишь найти площадь трапеции, образованной точками $x=1,\ y=\pm 1$ и $x=3,\ y=\pm 3$. Она равна 8.

Ответ: 8

**3.** *Вычислить:* $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\cdot dx}{\cos^2 x+1}$

**Решение.** Покажем сначала, что, если функция f(x) непрерывна на [0;1], то

$$\int_0^{\pi}x\cdot f(\cos^2 x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\cos^2 x)dx$$

$$\int_0^{\pi}x\cdot f(\cos^2 x)dx=/\,x=t+\frac{\pi}{2}\,/=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(t+\frac{\pi}{2})\cdot f(\cos^2(t+\frac{\pi}{2}))dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}t\cdot f(\sin^2 t)dt+$$

$$+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\pi}{2}f(\sin^2 t)dt=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\cos^2 x)dx$$

(Первый из интегралов равен нулю, так как интегрируем нечётную функцию по симметричному относительно нуля промежутку, а $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\sin^2 t)dt = \int\limits_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx$).

Применим теперь доказанную формулу к нашему интегралу:

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{x \cdot dx}{\cos^2 x + 1} = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 x + 1} = /\cos^2(\frac{\pi}{2} - x) = \cos^2(\frac{\pi}{2} + x)/ = \pi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos^2 x + 1} =$$

$$= /tgx = t/ = \pi \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(1+\frac{1}{t^2+1})} = \pi \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} arctg \left.\frac{t}{\sqrt{2}}\right|_0^{+\infty} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} \quad .$$

**4.** *Пусть* $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x^2 & \arcsin(x^2-1) \\ 2e^{1-\sin\frac{\pi}{2}x} & 1+\ln(2-x^7) & tg(x-1) \\ \cos(\pi x)-1 & \cos\ln(x+2) & \frac{\pi}{2}-\arccos(x^2-1) \end{vmatrix}$. *Доказать, что найдётся* $c \in (-1;1)$, *такое, что f'(c)=0.*

**Решение.** f(1)=0 (т.к. совпадают 1-ые 2 строчки определителя), f(-1)=0 (т.к. совпадают 1-ая и 3-яя строчки определителя), а тогда утверждение задачи напрямую следует из теоремы Ролля.

**5.** $f(x)$ - *непрерывно дифференцируемая на отрезке* $[0,1]$ *функция, причем* $f(1) = f(0)+1$. *Доказать, что* $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx > 1$.

**Решение.**

Воспользуемся очевидным неравенством $\left(f'(x)\right)^2 > 2f'(x) - 1$. Тогда $\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 dx > \int_0^1 \left(2f'(x)-1\right)dx = 2\left(f(1)-f(0)\right)-1 = 1$.

**6.** *Найти общее решение дифференциального уравнения* $(y-x)\sqrt{1+x^2}dy = \left(1+y^2\right)^{3/2}dx$.

**Решение.**

Сделаем замену переменных: $x = \mathrm{tg}\,u, \quad y = \mathrm{tg}\,v$. Тогда уравнение примет вид $\frac{(\mathrm{tg}\,v - \mathrm{tg}\,u)}{\cos u}\frac{dv}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^3 v}\frac{du}{\cos^2 u}$ или после упрощения $\sin(v-u)dv = du$. В последнем уравнении сделаем замену функции: $v = z(u) + u$. Получим $\sin z(dz+du) = du$ или $\frac{\sin z}{\sin z - 1}dz + du = 0$. Интегрируя последнее уравнение, получим $z + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right) + u = C$ или $\mathrm{arctg}\,y + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{arctg}\,y - \mathrm{arctg}\,x}{2}\right) = C$.

7. *Найти уравнение геометрического места оснований перепендикуляров, опущенных из вершины параболы* $y^2 = -4ax$ *на касательные к этой параболе.*

**Решение.** Уравнение касательной $l_1$, проведенной к параболе в точке $(x_0;y_0)$, имеет вид $4ax+2yy_0-y_0^2=0$; уравнение перпендикуляра $l_2$ к $l_1$, опущенного из $(0;0)$, имеет вид $y_0x-2ay=0$. Координаты $(x;y)$ точки пересечения $l_1$ и $l_2$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases}4ax+2yy_0-y_0^2=0\\ y_0x-2ay=0\end{cases},\quad \text{или}\quad \begin{cases}x=\dfrac{ay_0^2}{y_0^2+4a^2}\\ y=\dfrac{y_0^3}{2\cdot\left(y_0^2+4a^2\right)}\end{cases}.$$

Исключая параметр $y_0$, получаем ответ: $xy^2+x^3-ay^2=0$.

8. *Из одной точки проведены три некомпланарных вектора* $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. *Что можно утверждать о взаимном расположении плоскости, проведенной через концы этих векторов и вектора* $\mathbf{d}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ *(запись* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *означает векторное произведение векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$*)? Утверждение следует обосновать.*

**Решение.** Ответ на вопрос задачи – утверждение, что вектор $\mathbf{d}$ ортогонален заданной плоскости. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что он ортогонален каждому из векторов $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}-\mathbf{a}$. Обозначим через $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ смешанное произведение векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$, т.е. $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=(\mathbf{a},\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{d})$:

$$(\mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{d})=(\mathbf{b}-\mathbf{a},\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a})=(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{b})+(\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{c})+(\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a})-(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b})-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})-(\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{a})=0.$$

Аналогично $(\mathbf{c}-\mathbf{a},\mathbf{d})=0$. Утверждение доказано.

P.S. Если вектор $\mathbf{d}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$, то векторы $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ - компланарны.

9. *Пусть* $A$ *и* $B$ *- автоморфизмы, действующие в* $\mathbb{R}^n$ *(т.е. линейные операторы* $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *и* $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$*). Пусть их коммутатор* $C$ *(оператор* $C=AB-BA$*) перестановочен с операторами* $A$ *и* $B$. *Доказать, что тогда оператор* $C$ *нильпотентен (т.е. некоторая натуральная степень оператора* $C$ *равна нулевому оператору).*

**Решение.** Рассмотрим набор операторов $\left\{I,B,B^2,\dots,B^{n^2}\right\}$ (здесь $I$ - тождественный оператор). Этот набор линейно зависим, т.к. размерность пространства автоморфизмов, действующих в $\mathbb{R}^n$ равна $n^2$. Поэтому для некоторых $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_s$, $s\le n^2$, имеем: $\alpha_0I+\alpha_1B+\dots+\alpha_{s-1}B^{s-1}+B^s=0$, или $p_s(B)=0$. Индукцией по $k$ нетрудно показать, что $AB^k-B^kA=kB^{k-1}C$ : при $k=1$ это верно, и если это верно для $k-1$, то $AB^k-B^kA=(AB-BA)B^{k-1}+B\left(AB^{k-1}-B^{k-1}A\right)=CB^{k-1}+B(k-1)B^{k-2}C=kB^{k-1}C$. Поэтому $Ap_s(B)-p_s(B)A=\alpha_1C+2\alpha_2BC+\dots+sB^{s-1}C=Cp_S'(B)=0$. Далее $ACp_S'(B)-Cp_S'(B)A=C^2p_S''(B)=0$. Продолжая аналогичным образом, получим в конце концов равенство $s!C^S=0$, т.е. $C^S=0$.

*10. Сколько решений имеет система уравнений* $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 = \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}x_n = \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n \end{cases}$ *? Все коэффициенты* $\alpha_{ij}$ *- целые числа.*

**<u>Решение.</u>** Ответ: решение единственно, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Чтобы доказать этот факт, достаточно убедиться, что определитель заданной системы отличен от 0. Легко видеть, что этот определитель равен $P\left(\frac{1}{2}\right)$, где $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\lambda & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-\lambda & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$. Заметим, что функция $P(\lambda)$ представляет собой полином степени $n$: $P(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_n$, где все $b_i$-целые. Если бы $P\left(\frac{1}{2}\right)$ равнялось 0, то было бы $(-1)^n \frac{1}{2^n} + b_1 \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots + b_n = 0$. Умножая последнее равенство на $2^n$, мы получили бы: $(-1)^n + 2b_1 + 2^2 b_2 + \ldots + 2^n b_n = (-1)^n + N = 0$, что невозможно, ибо $N$ - целое.