СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2009 г.

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\pi\operatorname{ctg}\pi x\right)$.
2. Найти площадь многоугольника, координаты вершин которого находятся из решения уравнения: $\sum\limits_{k=1}^{x} k! = y^2$ в целых числах.
3. Вычислить: $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\cdot dx}{\cos^2 x+1}$
4. Пусть $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x^2 & \arcsin(x^2-1) \\ 2e^{1-\sin\frac{\pi}{2}x} & 1+\ln(2-x^7) & tg(x-1) \\ \cos(\pi x)-1 & \cos\ln(x+2) & \dfrac{\pi}{2}-\arccos(x^2-1) \end{vmatrix}$. Доказать, что найдётся $c\in(-1;1)$, такое, что f'(c)=0.
5. 5. $f(x)$- непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция, причем $f(1)=f(0)+1$. Доказать, что $\int_0^1\left(f'(x)\right)^2 dx>1$.
6. Найти общее решение дифференциального уравнения $(y-x)\sqrt{1+x^2}dy=\left(1+y^2\right)^{3/2}dx$.

7. Найти уравнение геометрического места оснований перепендикуляров, опущенных из вершины параболы $y^2=-4ax$ на касательные к этой параболе.

8. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. Что можно утверждать о взаимном расположении плоскости, проведенной через концы этих векторов и вектора $\mathbf{d}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ (запись $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ означает векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$)? Утверждение следует обосновать.
9. Пусть A и B - автоморфизмы, действующие в $\mathbb{R}^n$ (т.е. линейные операторы $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и $B:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$). Пусть их коммутатор C (оператор $C=AB-BA$) перестановочен с операторами A и B. Доказать, что тогда оператор C нильпотентен (т.е. некоторая натуральная степень оператора C равна нулевому оператору).
10. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases}\frac{1}{2}x_1=\alpha_{11}x_1+\ldots+\alpha_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2}x_n=\alpha_{n1}x_1+\ldots+\alpha_{nn}x_n\end{cases}$? Все коэффициенты α_{ij} - целые числа.