СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПБГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2010 г. (решения задач)

1. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\sqrt{3!...\sqrt{n!}}}}$ **имеет предел.**

<u>**Решение.**</u> Найдем

$$\ln x_n = \frac{1}{2}\left(\ln 1 + \frac{1}{2}\left(\ln 2 + \frac{1}{2}\left(\ln 3! + ... + \frac{1}{2}(\ln n!)\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\ln 1 + \frac{1}{2^2}\ln 2 + \frac{1}{2^3}\ln 3! + ... + \frac{1}{2^n}\ln n!$$

Таким образом, $\ln x_n$ является частной суммой ряда с общим членом $a_n = \frac{\ln n!}{2^n}$. Этот ряд сходится так как $a_n < \frac{n\ln n}{2^n}$, следовательно, данная последовательность также сходится.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(x^2+1\right)\left(y'^2 - yy''\right) = xyy'$

<u>**Решение.**</u> $\left(x^2+1\right)\frac{y'^2 - yy''}{y^2} = x\frac{y'}{y}$. Обозначим $z = \frac{y'}{y}$, $z' = \frac{y''y - y'^2}{y^2}$.

Уравнение примет вид $-\left(x^2+1\right)z' = xz$, откуда $\ln z + \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = \ln C_1$ или

$\frac{y'}{y} = \frac{C_1}{\sqrt{x^2+1}}$ Ответ $\ln y = C_1 \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \ln C_2$

3. Найти сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{arcctg}(k^2+k+1)$.

<u>Примечание.</u> Суммой числового ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ называют предел (если он существует и конечен) последовательности частных сумм ряда: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

<u>**Решение.**</u> $arcctg(k^2+k+1) = arctg\,\frac{1}{k^2+k+1} = arctg\,\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}$. Рассмотрим последовательность x_k, такую что $tgx_k = k$.

Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} arcctg(k^2+k+1) = \sum_{k=0}^{\infty} arctg\,\frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} arctg\,\frac{tgx_{k+1} - tgx_k}{1+tgx_{k+1}tgx_k} = \sum_{k=0}^{\infty} arctg(tg(x_{k+1}-x_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1}-x_k) = x_\infty - x_0 = \lim_{k\to+\infty} arctg(k) - arctg(0) = \frac{\pi}{2}.$$

4. Найдите функцию $f(x)$, $x \in [0,1]$, **если** $f'\left(\sin^2 x\right) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$.

<u>**Решение.**</u> Обозначим $t = \sin^2 x$. Тогда $f'(t) = 1 - 2t^2 + \frac{t^2}{1-t^2}$ и

$$f(t) = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

5. Вычислить $\int_{-1}^{1}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+e^x}dx$

Решение.

$$\int_{-1}^{1}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+e^x}dx=\int_0^1+\int_{-1}^0=\int_0^1-\int_1^0\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^1\frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)}\ln\left(1+x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\ln\left(1+x^2\right)dx=x\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{1+x^2}dx=\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$$

6. Пусть $P_1\left(x\right)=x^2-2,\ P_k\left(x\right)=P_1\left(P_{k-1}\left(x\right)\right)$. **Докажите, что для любого** n **корни уравнения** $P_n\left(x\right)=x$ **вещественны и различны.**

__Решение.__ Если x пробегает промежуток $\left[-2,2\right]$, то $P_1\left(x\right)$ проходит этот же промежуток дважды, $P_2\left(x\right)$ проходит этот промежуток 4 раза и, аналогично, $P_n\left(x\right)$ будет пробегать этот промежуток $2n$ раз. При каждом изменении $P_n\left(x\right)$ от -2 до +2 уравнение $P_n\left(x\right)=x$ будет иметь один корень. Следовательно, всего у этого уравнения будет $2n$ корней.

7. **Задана система уравнений:**

$$x_1+\frac{1}{x_2}=4;\ x_2+\frac{1}{x_3}=1;\ x_3+\frac{1}{x_4}=4;\ \dots\ ;\ x_{99}+\frac{1}{x_{100}}=4;\ x_{100}+\frac{1}{x_1}=1.$$

Найти количество ее решений в положительных числах. Ответ обосновать. Указать эти решения.

__Решение: **Ответ:**__ $x_1=x_3=\ldots=x_{99}=2$; $x_2=x_4=\ldots=x_{100}=\frac{1}{2}$ Решение в положительных числах единственно.

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для любых $x>0;\ y>0$ имеем: $x+\frac{1}{y}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{x}{y}}$. Поэтому

$$x_1+\frac{1}{x_2}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\ ;\quad x_2+\frac{1}{x_3}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}\ ;\ \dots\ ;\quad x_{100}+\frac{1}{x_1}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{x_{100}}{x_1}}\ . \qquad (1)$$

Перемножая эти неравенства, получим

$$\left(x_1+\frac{1}{x_2}\right)\cdot\left(x_2+\frac{1}{x_3}\right)\cdot\ \dots\ \cdot\left(x_{100}+\frac{1}{x_1}\right)\geq 2^{100}=4^{50}.$$

Перемножая уравнения системы, видим, что это неравенство обращается в равенство. Следовательно, каждое из неравенств (1) должно обращаться в равенство, т.е.

$x_1=\frac{1}{x_2};\ x_2=\frac{1}{x_3};\ \dots\ ;\ x_{100}=\frac{1}{x_1}$. Подставляя полученные выражения для $x_1;\ x_2;\ \dots\ ;\ x_{100}$ в исходную систему, находим ответ.

8. Пусть A - положительно определённая симметричная матрица порядка n. Докажите, что $(TrA)\cdot(TrA^{-1})\geq n^2$.

__Решение:__ Из того, что A положительно определённая и симметричная следует, что у неё всегда существует обратная, все её собственные значения строго положительны. След матрицы равен сумме её собственных значений. Можно легко показать, что если λ_i - собственное число матрицы A, то $1/\lambda_i$ - соответствующее собственное число матрицы A^{-1} (матрица обратима, а значит, нулевых собственных чисел у неё нет). Тогда утверждение задачи можно переформулировать как $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}1/\lambda_i\right)\geq n^2$, что эквивалентно неравенству между средним арифметическим и средним гармоническим.

9. У Рассеянного с улицы Бассейной n пар перчаток. Он случайным образом выбирает 2r (2r<2n) перчаток. Найдите вероятность того, что среди выбранных перчаток найдётся ровно m пар (m$\leq$r). Примечание. Вероятность случайного события A в соответствии с классическим определением вероятности вычисляется по формуле: $P(A)=m/n$, где m - число благоприятных элементарных исходов испытания, а n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

Решение: Всего способов выбрать 2r перчаток из 2n штук: C_{2n}^{2r}. Найдём сначала число способов взять 2r перчаток так, чтобы среди них никакие две не образовывали пару. Для этого нужно из n левых перчаток выбрать k штук и из оставшихся n-k правых перчаток, которые не образуют пару с левыми выбрать оставшиеся 2r-k штук. Таким образом, при всевозможных k получим:

$$\sum_{k=0}^{2r}C_n^kC_{n-k}^{2r-k}=\sum_{k=0}^{2r}\frac{n!(n-k)!}{k!(n-k)!(2r-k)!(n-2r)!}=\frac{n!}{(n-2r)!}\sum_{k=0}^{2r}\frac{1}{k!(2r-k)!}=$$
$$=\frac{n!}{(n-2r)!(2r)!}\sum_{k=0}^{2r}\frac{(2r)!}{k!(2r-k)!}=C_n^{2r}\sum_{k=0}^{2r}C_{2r}^k=C_n^{2r}2^{2r}$$

Здесь мы воспользовались хорошо известным и легко доказываемым свойством биномиальных коэффициентов: $\sum_{k=0}^{n}C_n^k=2^n$.

Теперь вернёмся к исходной постановке задачи. Число способов выбрать из n левых перчаток m штук, которые будут образовывать пару с соответствующими правыми перчатками равно C_n^m. И надо ещё из оставшихся 2(n-m) перчаток выбрать оставшиеся 2r-2m штук так, чтобы среди них не было ни одной пары. Но аналогичную задачу мы ранее уже решили, следовательно, заменив 2n на 2(n-m) и 2r на 2r-2m, получим, что число таких способов будет $C_{n-m}^{2(r-m)}2^{2(r-m)}$. Значит, чтобы получить общее число благоприятных исходов, необходимо перемножить: $C_n^mC_{n-m}^{2(r-m)}2^{2(r-m)}$. Тогда вероятность, что среди 2r выбранных перчаток будет ровно m пар равна $\dfrac{C_n^mC_{n-m}^{2(r-m)}2^{2(r-m)}}{C_{2n}^{2r}}$.

10. Размерность суммы двух подпространств пространства $\mathbb{R}^n$ $(n<\infty)$ на единицу больше размерности их пересечения. Что можно утверждать о соотношении этих подпространств с их суммой и пересечением как множествами? Ответ обосновать.

Решение: Ответ: Сумма этих подпространств совпадает с одним из них, а пересечение - с другим.

Для доказательства применим два известных факта из курса линейной алгебры:

1. $\dim L_1+\dim L_2=\dim(L_1+L_2)+\dim(L_1\cap L_2)$ (1)

2. Если $\dim L_1=\dim L'$ и L_1 - подпространство L', то $L_1=L'$ (2)

Пусть $\dim(L_1\cap L_2)=k$, $\dim(L_1+L_2)=k+1$, $\dim L_1=k+m_1$, $\dim L_2=k+m_2$

Тогда из (1) следует, что $m_1+m_2=1$; т.е. $m_1=0; m_2=1$ или $m_1=1; m_2=0$. Поэтому из (2) вытекает, что в первом случае $L_1=L_1\cap L_2$, $L_2=L_1+L_2$, а во втором – наоборот.