СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2010 г.

1. Доказать, что последовательность $x_n = \sqrt{1!\sqrt{2!\sqrt{3!...\sqrt{n!}}}}$ **имеет предел.**

2. Найти общее решение дифференциального уравнения $\left(x^2+1\right)\left(y'^2 - yy''\right) = xyy'$

3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{arcctg}(k^2+k+1)$.

Примечание. Суммой числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ называют предел (если он существует и конечен) последовательности частных сумм ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, где $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

4. Найти функцию $f(x),\quad x \in [0,1]$**, если** $f'\left(\sin^2 x\right) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$**.**

5. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+e^x} dx$

6. Пусть $P_1(x) = x^2 - 2,\ P_k(x) = P_1\left(P_{k-1}(x)\right)$**. Докажите, что для любого** n **корни уравнения** $P_n(x) = x$ **вещественны и различны.**

7. Задана система уравнений:

$$x_1 + \frac{1}{x_2} = 4;\ x_2 + \frac{1}{x_3} = 1;\ x_3 + \frac{1}{x_4} = 4;\ \dots\ ;\ x_{99} + \frac{1}{x_{100}} = 4;\ x_{100} + \frac{1}{x_1} = 1.$$

Найти количество ее решений в положительных числах. Ответ обосновать. Указать эти решения.

8. Пусть A **- положительно определённая симметричная матрица порядка** n**. Докажите, что** $(TrA)\cdot(TrA^{-1}) \geq n^2$**.**

9. У Рассеянного с улицы Бассейной n пар перчаток. Он случайным образом выбирает 2r (2r<2n) перчаток. Найдите вероятность того, что среди выбранных перчаток найдётся ровно m пар (m≤r).

Примечание. Вероятность случайного события A в соответствии с классическим определением вероятности вычисляется по формуле: $P(A) = m/n$, где m - число благоприятных элементарных исходов испытания, а n - число всех возможных элементарных исходов испытания.

10. Размерность суммы двух подпространств пространства $\mathbb{R}^n$ $(n < \infty)$ **на единицу больше размерности их пересечения. Что можно утверждать о соотношении этих подпространств с их суммой и пересечением как множествами? Ответ обосновать.**