СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2011 г. (решения задач)

1. Пусть $\pi(x)$ - число простых чисел, не превосходящих x. Найти область сходимости ряда $\pi(x)+\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right)+\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right)+\ldots+\frac{1}{n}\pi\left(\sqrt[n]{x}\right)+\ldots$, рассматриваемого на области $x>0$.

Решение. Так как $\pi(x)=0$, если $x<2$ и для любого вещественного числа x для достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{x}<2$, то данный ряд при любом x представляет собой конечную сумму и, следовательно, сходится. Область сходимости $x>0$.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2011}}{2011}\right)^n$.

Решение. Обозначим $\left(\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2011}}{2011}\right)^n=A$. Тогда

$$\ln A=n\ln\left(\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2011}}{2011}\right)\sim n\left(\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2011}}{2011}-1\right)=n\frac{\sum\limits_{k=1}^{2011}\left(k^{1/n}-1\right)}{2011}=$$

$$=\frac{n}{2011}\sum_{k=1}^{2011}\left(\frac{1}{n}\ln k+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{\sum\limits_{k=1}^{2011}\ln k}{2011}+o(1)=\frac{\ln 2011!}{2011}+o(1)$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\ldots+\sqrt[n]{2011}}{2011}\right)^n=e^{\frac{\ln 2011!}{2011}}=(2011!)^{1/2011}$.

3. Вычислить $\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(y(x)\right)^3}$, где функция $y(x)$ задана неявно уравнением $y^2+4x=2\ln y$, а промежуток $[a,b]$ - промежуток убывания этой функции.

Решение. Сначала найдем промежуток интегрирования.

$x'_y=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{y}-2y\right)=\frac{1}{2}\frac{1-y^2}{y}$. Так как взаимно обратные функции имеют одинаковый характер монотонности, то на области значений соответствующей промежутку $[a,b]$ должно выполняться неравенство $x'_y\le 0$. Следовательно, с учетом того, что $y>0$ этой областью будет промежуток $[1,+\infty)$.

Тогда искомый интеграл равен $\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(y(x)\right)^3}=\int_{+\infty}^{1}\frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)}{y^3}dy=\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{1}\frac{1-y^2}{y^4}dy=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{1}{3}$.

4. Доказать неравенство: $C_{2n+k}^{n}C_{2n-k}^{n}\le\left(C_{2n}^{n}\right)^2$

Решение: Рассмотрим последовательность с общим членом $a_k = C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n$. Тогда

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{2n+k+1}^n C_{2n-k-1}^n}{C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n} = \frac{\dfrac{(2n+k+1)!(2n-k-1)!}{n!(n+k+1)!(n-k-1)!n!}}{\dfrac{(2n+k)!(2n-k)!}{n!(n+k)!(n-k)!n!}} = \frac{(2n+k+1)(n-k)}{(2n-k)(n+k+1)} = \frac{2n^2-k^2-k-nk+n}{2n^2-k^2-k+nk+2n} < 1,$$

следовательно, последовательность монотонно убывает и принимает свое наибольшее значение при $k=0$, равное $\left(C_{2n}^n\right)^2$.

5. Решить функциональное уравнение $2xf(x) + f\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = 2x$

Решение: Подставив в исходное уравнение $\dfrac{1}{1-x}$ вместо x, получим новое уравнение: $\dfrac{2}{1-x} f(\dfrac{1}{1-x}) + f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \dfrac{2}{1-x}$. Подставив в исходное уравнение $\dfrac{x-1}{x}$ вместо x, получим новое уравнение: $\dfrac{2(x-1)}{x} f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) + f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x}$. Сделав замену $f(x)=a$, $f(\dfrac{1}{1-x}) = b$, $f\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = c$, получим линейную систему из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными a,b,c: $\begin{cases} 2xa+b=2x \\ \dfrac{2}{1-x}b + c = \dfrac{2}{1-x} \\ \dfrac{2(x-1)}{x}c + a = \dfrac{2(x-1)}{x} \end{cases}$, решив которую, найдем $a = f(x) = \dfrac{6x-2}{7x}$.

6. Пусть $a_1, a_2, \dots a_n$ произвольные вещественные числа. Доказать, что уравнение $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$ имеет решение на промежутке $(0,\pi)$.

Решение. Обозначим $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = g(x)$ и рассмотрим функцию $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$. Так как $G(0) = G(\pi) = 0$, то эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует точка $c \in (0,\pi)$, в которой $G'(c) = g(c) = 0$.

7. Параметры a и b меняются так, что система $\begin{cases} y = ax+1 \\ x^2+y^2 = 2bx \end{cases}$ имеет единственное решение (x_0, y_0). Какую кривую при этом описывает точка $M_0(x_0, y_0)$?

Решение. Очевидно, что точка $M_0(x_0, y_0)$ является точкой касания прямой $y = ax+1$ и окружности $x^2+y^2=2bx$, поэтому она удовлетворяет системе уравнений $\begin{cases} y_0 = ax_0 + 1 \\ {x_0}^2 + {y_0}^2 = 2bx_0 \\ a = \dfrac{b-x_0}{\sqrt{2bx_0 - x_0^2}} \end{cases}$,

причем $y_0 > 0$. Исключая из этой системы параметры a и b, получим уравнение линии,

которую описывает точка M_0: $x_0^2+y_0^2=2y_0$ (окружность радиуса 1 с центром в точке $(0;1)$), из которой надо исключить точки, лежащие на оси
ОУ: $(0;0)$ и $(0;2)$.

8. Оценить сверху (оценка должна быть точной) значение выражения $|\cos\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta|$, где α,β и γ - направляющие углы некоторого вектора. Выяснить, когда выполняется знак равенства (ответ обосновать).

Ответ: $|\cos\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta|\le\sqrt{2}$. Равенство выполняется только при $\alpha=\beta=\gamma$.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}=(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ и $\vec{b}=(\sin\gamma;\sin\alpha;\sin\beta)$. Из свойства направляющих косинусов вектора имеем: $|\vec{a}|^2=1;|\vec{b}|^2=2$. Поэтому из известной оценки $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ получаем: $|\cos\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta|\le\sqrt{2}$. Докажем, что равенство достигается только при $\alpha=\beta=\gamma$. Поскольку при $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, получим систему уравнений для трех их координат:

$$\begin{cases}\sin\gamma=\pm\cos\alpha\\ \sin\alpha=\pm\cos\beta\\ \sin\beta=\pm\cos\gamma\end{cases}\quad(*)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\sin^2\gamma=1\\ \sin^2\beta+\frac{1}{2}\sin^2\alpha=1\\ \sin^2\gamma+\frac{1}{2}\sin^2\beta=1\end{cases}\quad(**).$$

Из первого уравнения системы (**) и равенства $|\vec{b}|^2=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ имеем: $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$. Аналогично получаем $\sin^2\alpha=\sin^2\gamma$. Окончательно, $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ (синусы направляющих углов неотрицательны) и $\alpha=\beta=\gamma$. Соотношения вида $\alpha=\pi-\beta$ не реализуются (см. систему (*)).

9. Задана квадратная матрица $\mathbf{A}=\|a_{ij}\|$ размера $n\times n$ такая, что $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|<1$ для каждого значения $i=1;2;\ldots;n$. Выяснить, является матрица $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ обратимой (здесь $\mathbf{E}$ - единичная матрица размера $n\times n$). Ответ обосновать.

Ответ: Да. При этом $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots$(сумма сходящегося матричного ряда).

Решение. Разложение в ряд

$$(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots\qquad(*)$$

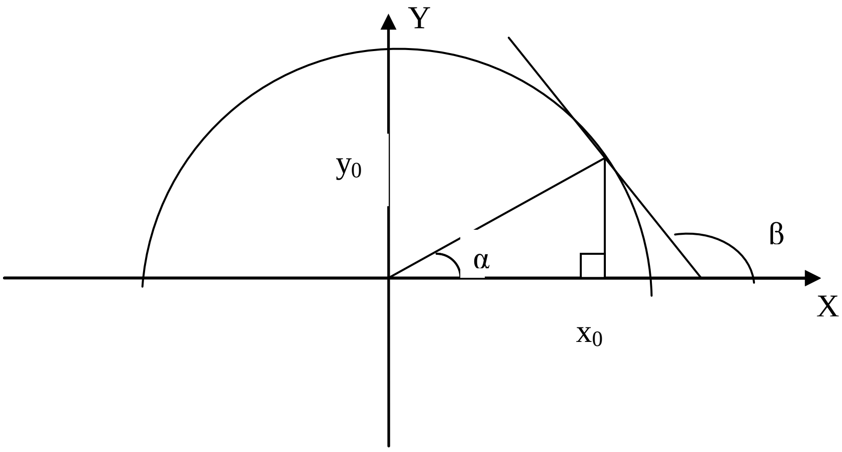
аналогично известному разложению $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots\quad(|x|<1)$. Выясним, сходится ли ряд в правой части равенства (*). Положим $\alpha=\max\limits_i\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)$. По условию задачи $\alpha<1$. Тогда

$$\sum_k\left|\sum_j a_{ij}a_{jk}\right|\le\sum_{j,k}|a_{ij}a_{jk}|=\sum_j\left(|a_{ij}|\cdot\sum_k|a_{jk}|\right)\le\alpha\cdot\sum_j|a_{ij}|\le\alpha^2.$$

По индукции мы можем получить, что элементы $a_{ij}(n)$ матрицы $\mathbf{A}^n$ удовлетворяют неравенству $\sum_j|a_{ij}(n)|<1$ для всех $i=1;2;\ldots;n$. Поскольку геометрическая прогрессия $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots\quad(\alpha<1)$ сходится, сходится и ряд из матриц $\mathbf{E}+\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^3+\ldots$. Сумма этого ряда и равна матрице, обратной к $\mathbf{E}-\mathbf{A}$.

10. Найти уравнение такой зеркальной кривой, проходящей через точку (1;0), что все лучи, выходящие из начала координат (источника), отразившись от нее, пойдут перпендикулярно оси абсцисс.

Решение:



Совместим начало декартовой системы координат с источником. Выберем произвольный угол, который выходит из источника под углом α к положительному направлению оси OX. Проведём касательную в точке отражения, угол падения равен углу отражения, отсюда легко можно найти, что угол наклона касательной $\beta = \frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$.

Пусть искомая кривая задаётся как $y(x)$. Тогда $y'(x_0) = tg\beta$.

С одной стороны, $tg\beta = tg\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{tg\frac{\alpha}{2} - 1}{tg\frac{\alpha}{2} + 1}$. С другой стороны, $tg\alpha = \frac{y(x_0)}{x_0}$.

Получаем следующую систему уравнений: $\begin{cases} y' = \dfrac{tg\frac{\alpha}{2} - 1}{tg\frac{\alpha}{2} + 1} \\ tg\alpha = \dfrac{y}{x} \end{cases}$

Избавляясь от α, приходим к дифференциальному уравнению: $xy'^2 - 2yy' - x = 0$.

Можно проверить, что данное дифференциальное уравнение будет обобщённым однородным с параметром m=1, а значит, его порядок можно понизить заменой $x = e^t$, $y = z(t)e^{mt} = z(t)e^t$. Сделав такую замену, получим дифференциальное уравнение $z'^2 = z^2 + 1$, которое после извлечения корня из обеих частей уже станет линейным с разделяющимися переменными. Решив которое, находим, что $z = \pm sh(t + c)$.

Вспомнив нашу замену переменных, найдём, что $y = \pm x \cdot sh(\ln x + c) = \pm\frac{c_1^2 x^2 - 1}{2c_1}, c_1 \neq 0$.

В силу произвольности константы, ± можно отбросить и получить, что уравнение искомой кривой $y = \frac{c_1^2 x^2 - 1}{2c_1}, c_1 \neq 0$. Константу c_1 можно легко найти из условия того, что кривая проходит через точку (1;0). В результате получим 2 параболы: $y = \pm\frac{x^2 - 1}{2}$.