СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2011 г.

1. Пусть $\pi(x)$ - число простых чисел, не превосходящих x. Найти область сходимости ряда $\pi(x)+\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right)+\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right)+...+\frac{1}{n}\pi\left(\sqrt[n]{x}\right)+...$, рассматриваемого на области $x>0$.

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+...+\sqrt[n]{2011}}{2011}\right)^n$.

3. Вычислить $\int\limits_a^b\frac{dx}{\left(y(x)\right)^3}$, где функция $y(x)$ задана неявно уравнением $y^2+4x=2\ln y$, а промежуток $[a,b]$ - промежуток убывания этой функции.

4. Доказать неравенство: $C_{2n+k}^{n}C_{2n-k}^{n}\le\left(C_{2n}^{n}\right)^2$.

5. Решить функциональное уравнение $2xf(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x$.

6. Пусть $a_1,a_2,...a_n$ - произвольные вещественные числа. Доказать, что уравнение $a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx=0$ имеет решение на промежутке $(0,\pi)$.

7. Параметры a и b меняются так, что система $\begin{cases}y=ax+1\\x^2+y^2=2bx\end{cases}$ имеет единственное решение (x_0,y_0). Какую кривую при этом описывает точка $M_0(x_0,y_0)$?

8. Оценить сверху (оценка должна быть точной) значение выражения $\left|\cos\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta\right|$, где α,β и γ - направляющие углы некоторого вектора. Выяснить, когда выполняется знак равенства (ответ обосновать).

9. Задана квадратная матрица $\mathbf{A}=\left\|a_{ij}\right\|$ размера $n\times n$ такая, что $\sum\limits_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|<1$ для каждого значения $i=1;2;\ldots;n$. Выяснить, является матрица $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ обратимой (здесь $\mathbf{E}$ - единичная матрица размера $n\times n$). Ответ обосновать.

10. Найти уравнение такой зеркальной кривой, проходящей через точку (1;0), что все лучи, выходящие из начала координат (источника), отразившись от нее, пойдут перпендикулярно оси абсцисс.