СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА СПбГУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2012 г.

1. Условие: Найти формулу для вычисления $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2$

Решение: Рассмотрим разложения полинома $(1-x^2)^n$ по формуле бинома.

Если n четно, т.е. $n=2m$, то, с одной стороны, $(1-x^2)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k x^{2k}$, с другой $(1-x^2)^{2m} = (1-x)^{2m}(1+x)^{2m} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k x^k \sum_{l=0}^{2m} C_{2m}^l x^l$. Коэффициент перед x^{2m} во втором разложении будет равен $\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2m}^{2m-k} = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \left(C_{2m}^k\right)^2 = S_{2m}$ (в последнем равенстве мы воспользовались простым и хорошо известным соотношением $C_n^k = C_n^{n-k}$). Следовательно, сумма S_n равна коэффициенту перед x^{2m} в первом разложении, т.е. $S_{2m} = (-1)^m C_{2m}^m$.
Если же n нечетно, т.е. $n=2m+1$ то, очевидно, коэффициент перед x^{2m+1} во втором разложении, также будет равен искомому выражению, тогда как в первом разложении все иксы, по-прежнему, будут лишь в четных степенях. Следовательно, искомый коэффициент первого разложения будет равен нулю и $S_{2m+1} = 0$.

2. Условие: Найти все точки координатной плоскости (Oab), координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют соотношению $5a - 8b - 23 + 7 \cdot \sqrt{a^2 + 64b^2 + 23} = 0$.
Решение: Введем два вектора $\vec{x} = \left(a; 8b; \sqrt{23}\right)$ и $\vec{y} = \left(5; -1; -\sqrt{23}\right)$. Получим: $\left(\vec{x}; \vec{y}\right) + \left|\vec{x}\right| \cdot \left|\vec{y}\right| = 0$.

Поэтому $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ $(\lambda < 0)$, т.е. $\frac{a}{5} = \frac{8b}{-1} = \frac{\sqrt{23}}{-\sqrt{23}} = -1$. Ответ: (-5; 1/8)

3. **Условие:** Два игрока по очереди заполняют матрицу размерности 10×10 вещественными числами. Если у полученной матрицы найдётся хотя бы одно положительное собственное число, победителем объявляется второй игрок, иначе первый. Кто победит при правильной игре, и какова выигрышная стратегия?

Решение: Выигрышная стратегия есть у второго игрока. Стратегия: на ход первого игрока a_{ij} $(i \neq j)$ отвечать ходом $a_{ji} = a_{ij}$, на ход первого игрока a_{ii} отвечать произвольным ходом a_{jj} (пока не нужно будет поставить последний элемент на главной диагонали). Матрица имеет чётный порядок, значит, последний ход на главной диагонали при такой стратегии сделает второй игрок, ему нужно поставить число, большее модуля суммы всех других чисел на главной диагонали. В этом случае матрица получится симметричной, а значит, все её собственные числа будут вещественными. Сумма собственных чисел равна следу матрицы (который при такой стратегии будет положительным), а значит, хоть одно из собственных чисел будет положительным.

4. Условие: Все собственные числа невырожденной матрицы A различны и одно из них удовлетворяет уравнению: $x^3 = (TrA)x^2 + \det A$. Докажите, что остальные собственные числа матрицы A также являются решениями данного уравнения.

Решение: Пусть x_1, x_2, x_3 - решения уравнения, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - собственные числа матрицы A, причем, по условию задачи, $x_3 = \lambda_3 \neq 0$ (т.к. матрица A невырожденная). $TrA = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, следовательно, по теореме Виета,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0 \qquad (*). \\ x_1 x_2 x_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{cases}$$

$$\lambda_3^{\,3} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda_3^{\,2} - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_3^{\,2} + \lambda_2\lambda_3^{\,2} + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Несложно заметить, что $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, x_3 = \lambda_3$ - решение системы (*). Т.к. кубическое уравнение имеет ровно 3 решения, то других решений у системы (*) нет. Таким образом, все собственные числа являются корнями уравнения $x^3 - (TrA)x^2 - \det A = 0$.

5. **Условие:** Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие интегральному уравнению $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{4xy - 2y^2 - x^2} f(y)dy = x$.

Решение: Свёрткой двух функций $f(x)$ и $g(x)$ называется $(f * g)(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy$.

Не сложно показать, что свёртка обладает следующим хорошо известным свойством: преобразование Фурье свёртки двух функций факторизуется в произведение преобразований Фурье каждой из функций, умноженное на константу. Т.е., если обозначать преобразование Фурье символом «^»: $f(z) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{izx}dx$, получим: $(f * g) = \sqrt{2\pi}\, f\, g$.

Данное утверждение даёт нам простой способ решения интегральных уравнений вида $(f * g)(x) = h(x)$, где g(x) и h(x) – известные функции.

Идея решения:

$$(f * g) = h \Rightarrow \sqrt{2\pi}\, f\, g = (f * g) = h \Rightarrow f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h}{g} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(z)}{g(z)} e^{-izx} dz.$$

Если в уравнении домножить обе части на e^{-x^2}, получим: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2(x-y)^2} f(y)dy = xe^{-x^2}$. Левая часть будет представлять собой свёртку функций $f(x)$ и $g(x) = e^{-2x^2}$, $h(x) = xe^{-x^2}$.

Тогда чисто техническими преобразованиями (не сложнее выделения полного квадрата, простой замены переменной и интегрирования по частям, вспомнив также, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

получим: $\sqrt{2\pi}\, h = \frac{i}{2}\sqrt{\pi}\, z e^{-\frac{z^2}{4}}$, $\sqrt{2\pi}\, g = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{8}}$ =>

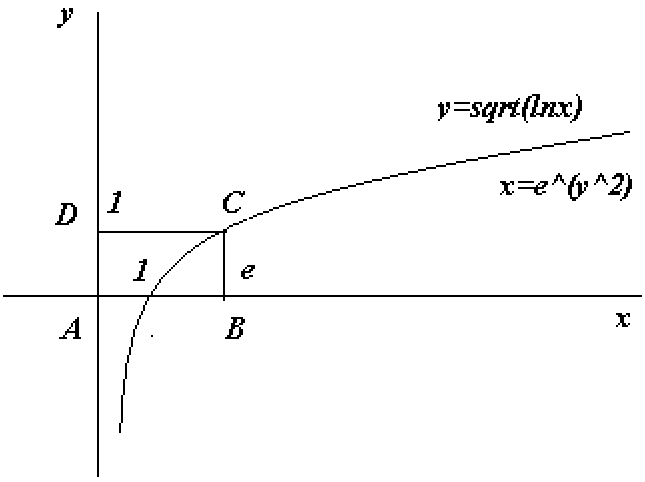
$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{i}{2}\sqrt{\pi}ze^{-\frac{z^2}{4}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{8}}}e^{-izx}dz=\frac{i}{2\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{8}}e^{-izx}dz=\frac{4}{\sqrt{\pi}}xe^{-2x^2}$$

6. Условие: Функция f определена на отрезке $[a,b]$ длины 4 и имеет на нем непрерывную производную. Докажите, что внутри отрезка $[a,b]$ найдется точка x, для которой $f'(x)-f^2(x)<1$

Доказательство: Предположим, что такой точки нет, тогда для всех точек интервала (a,b) выполнено неравенство $f'(x)-f^2(x)\geq 1$. Т.к. $f^2(x)+1>0$, данное неравенство эквивалентно тому, что $\frac{f'(x)}{f^2(x)+1}\geq 1$. Проинтегрируем неравенство по интервалу (a,b): $arctgf(b)-arctgf(a)=\int_a^b\frac{df(x)}{f^2(x)+1}\geq\int_a^b dx=b-a=4$. Но, в силу определения функции $arctgx$, для любых $x,y\in\mathbb{R}$ выполняется неравенство $arctgx-arctgy<\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi<4$, таким образом, мы получили противоречие.

7. Условие: Вычислить $\int_1^e\sqrt{\ln x}dx+\int_0^1 e^{x^2}dx$.

Решение: Функции $y=\sqrt{\ln x}$ и $y=e^{x^2}$ взаимно-обратны. Поэтому сумма интегралов представляет собой площадь прямоугольника ABCD, которая будет равна e (см.рис.).



8. Условие:Докажите, что уравнения $y''+\left(x+\cos x\right)y'+y=0$ и $y''+y'\cos x+xy=1$ не имеют общих решений.

Решение: Предполагая, что общее решение существует, вычтем второе уравнение из первого и получим, что оно удовлетворяет уравнению $xy'+y\left(1-x\right)+1=0$. Решение этого уравнения

$y=\frac{1}{x}+\frac{Ce^x}{x}$ не удовлетворяет ни одному из заданных уравнений, что нетрудно проверить прямой подстановкой.

9. Условие: Найти все дифференцируемые функции, не равные тождественно нулю, удовлетворяющие уравнению $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)=f(x)\cdot f(y)$.

Решение: Дифференцируя уравнение сначала по x, а затем по y, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{xf'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f'(x)f(y) \\ \dfrac{yf'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f'(y)f(x) \end{cases}$$

. Разделив первое уравнение системы на второе, получим

$\frac{x}{y}=\frac{f'(x)f(y)}{f'(y)f(x)}$ или $\frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{f'(y)}{yf(y)}=const=2C$.

Отсюда $f(x)=C_1e^{Cx^2}$.

Подставляя в исходное функциональное уравнение $x=y=0$, получим $f(0)=f^2(0)$, откуда $f(0)=0$ или $f(0)=1$. При $f(0)=0$ решением данного уравнения будет $f(x)\equiv 0$, что не удовлетворяет условию. Поэтому $f(0)=1$ и $f(x)=e^{Cx^2}$.

10. Условие: Найти $f''(1)$, если $f(1+f(x))=\ln x+x-1$ и $f(x)$ монотонно убывает.

Жюри олимпиады приносит свои извинения за некорректную постановку задачи №10. В условии должно быть сказано, что функция $f(x)$ - монотонно возрастает, а не убывает, как было в исходной формулировке.

Таким образом, корректное условие и решение имеют следующий вид:

10. Условие: Найти $f''(1)$, если $f(1+f(x))=\ln x+x-1$ и $f(x)$ монотонно возрастает.

Решение: Перепишем заданное соотношение в $f(1+f(x))+1=\ln x+x$ виде и обозначим $g(x)=1+f(x)$. Тогда заданное соотношение примет вид $g(g(x))=\ln x+x$. Так как $f(x)$ монотонно возрастает, то функция $g(x)$ также возрастает и имеет обратную, причем $g(x)=g^{-1}(\ln x+x)$. Тогда в точке $x=1$ получим $g(1)=g^{-1}(1)$. Для возрастающей функции такое соотношение выполнено только на прямой $y=x$, поэтому $g(1)=1$.

Продифференцируем соотношение $g(g(x))=\ln x+x$ два раза. Получим :

$g'(g(x))g'(x)=\frac{1}{x}+1$, откуда $g'(g(1))g'(1)=2$ или $(g'(1))^2=2$, тогда $g'(1)=\sqrt{2}$. Далее $g''(g(x))(g'(x))^2+g'(x)g''(x)=-\frac{1}{x^2}$. Отсюда получим $g''(1)(g'(1))^2+g'(1)g''(1)=-1$ или $g''(1)=-\frac{1}{2+\sqrt{2}}$. Ответ: $f''(1)=g''(1)=-\frac{1}{2+\sqrt{2}}$.