СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НИУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2012 г.

1. Найдите формулу для вычисления $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (C_n^k)^2$

2. Найдите все точки координатной плоскости (Oab), координаты $(a;b)$ которых удовлетворяют соотношению $5a - 8b - 23 + 7\cdot\sqrt{a^2 + 64b^2 + 23} = 0$.

3. Два игрока по очереди заполняют матрицу размерности 10×10 вещественными числами. Если у полученной матрицы найдётся хотя бы одно положительное собственное число, победителем объявляется второй игрок, иначе первый. Кто победит при правильной игре, и какова выигрышная стратегия?

4. Все собственные числа невырожденной матрицы A различны и одно из них удовлетворяет уравнению: $x^3 = (TrA)x^2 + \det A$. Докажите, что остальные собственные числа матрицы A также являются решениями данного уравнения.

5. Найти все функции $f(x)$, удовлетворяющие интегральному уравнению $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{4xy-2y^2-x^2} f(y)dy = x$.

6. Функция f определена на отрезке $[a,b]$ длины 4 и имеет на нем непрерывную производную. Докажите, что внутри отрезка $[a,b]$ найдется точка x, для которой $f'(x) - f^2(x) < 1$

7. Вычислите $\int_1^e \sqrt{\ln x}dx + \int_0^1 e^{x^2} dx$.

8. Докажите, что уравнения $y'' + (x+\cos x)y' + y = 0$ и $y'' + y'\cos x + xy = 1$ не имеют общих решений.

9. Найдите все дифференцируемые функции, не равные тождественно нулю, удовлетворяющие уравнению $f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = f(x)\cdot f(y)$.

10. Найдите $f''(1)$, если $f\left(1+f(x)\right) = \ln x + x - 1$ и $f(x)$ монотонно убывает.

Формулировка получилась некорректная, должно быть:

Найдите $f''(1)$, если $f\left(1+f(x)\right) = \ln x + x - 1$ и $f(x)$ монотонно убывает.