СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НИУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2013 г.

1. Найдите первую цифру числа 2^{400}.

Решение. $2^{400}=\left(2^{10}\right)^{40}=1024^{40}$.

Очевидно, что первая цифра данного числа совпадает с первой цифрой числа $(1,024)^{40}$.

Тогда $(1,024)^{40}<(1,025)^{40}=\left(1+\frac{1}{40}\right)^{40}<3$.

С другой стороны $(1,024)^{40}=\left(1+\frac{3}{125}\right)^{40}>1+\frac{40\cdot 3}{125}+\frac{40\cdot 39\cdot 3^2}{2\cdot 125^2}>1+\frac{24}{25}+\frac{20\cdot 25\cdot 5}{25\cdot 625}>2$.

Отсюда ясно, что первой цифрой числа является 2.

2. Пусть $f(x)$ - непрерывная, монотонно возрастающая на положительной полуоси функция, причем $f(0)=0$. Докажите, что $f(x)+f^{-1}(x)\geq 2x$ для $\forall x\geq 0$.

Решение. Утверждение ложно. Достаточно привести контрпример. Годится следующий: $f(x)=x^3$, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=0,9$ (разумеется, могут быть и другие).

3. Вычислить сумму ряда $\sum_1^\infty a_n$, где $a_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1/n \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель. Для этого к первому столбцу прибавим второй, умноженный на (-1), затем третий, умноженный на (-2) и т.д. Получим

$$a_n=\begin{vmatrix} -\frac{n(n+1)}{2} & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/n \end{vmatrix}=-\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n!}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{(n-1)!}.$$

$a_n=-\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{(n-1)!}$, тогда сумма ряда

$$S=\sum_{n=1}^\infty a_n=\sum_{n=1}^\infty-\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{(n-1)!}=-\frac{1}{2}(2+\sum_{n=2}^\infty\frac{n+1}{(n-1)!})=-\frac{1}{2}(2+\sum_{n=2}^\infty\frac{n-1}{(n-1)!}+\sum_{n=2}^\infty\frac{2}{(n-1)!})=$$

$$=-\frac{1}{2}(2+\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{(n-2)!}+2\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{(n-1)!})=-\frac{1}{2}(2+\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}+2\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k!})=-\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!}+2\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k!})=-\frac{3}{2}e.$$

4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y'=\frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Пусть $z(x)=x^2+y^2(x)$. Тогда $z'=2x+2yy'$ и уравнение можно переписать в виде $z'-2x=2x\sqrt{z}$. Разделяя переменные, получим $\frac{dz}{\sqrt{z}+1}=2xdx$, откуда $2\sqrt{z}-2\ln\left(1+\sqrt{z}\right)=x^2+C$ или $2\sqrt{x^2+y^2}-2\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)=x^2+C$.

5. Пусть многочлен $P(x)$ не имеет вещественных корней. Докажите, что многочлен $P(x)+\frac{P''(x)}{2!}+\frac{P^{(4)}(x)}{4!}+\ldots$ также не имеет вещественных корней.

Решение. По формуле Тейлора $P(x+1)=P(x)+\frac{P'(x)}{1!}+\frac{P''(x)}{2!}+\ldots$ и $P(x-1)=P(x)-\frac{P'(x)}{1!}+\frac{P''(x)}{2!}-\ldots$, откуда $P(x)+\frac{P''(x)}{2!}+\frac{P^{(4)}(x)}{4!}+\ldots=\frac{1}{2}\left(P(x+1)+P(x-1)\right)$.
Так как многочлен не имеет корней, то все его значения одного и того же знака. Следовательно, многочлен $P(x)+\frac{P''(x)}{2!}+\frac{P^{(4)}(x)}{4!}+\ldots$ имеет тот же знак и не обращается в ноль.

6. Пусть $S_n=n-(n-1)\log_2\frac{4}{3}-(n-2)\log_2\frac{9}{8}-\ldots-\log_2\frac{n^2}{n^2-1}$, $(S_1=1)$. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(S_n-\log_2 n\right)\right)$.

Решение. Найдем разность

$$S_n-S_{n-1}=1-\log_2\frac{4}{3}-\log_2\frac{9}{8}-\ldots-\log_2\frac{n^2}{n^2-1}=\log_2\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{1\cdot3}{2\cdot2}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\right)=\log_2(n+1)-\log n$$

Отсюда

$$S_n=S_{n-1}+\log_2(n+1)-\log_2 n=S_{n-2}+\log_2(n+1)-\log_2(n-1)=\ldots=S_1+\log_2(n+1)-1=\log_2(n+1).$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(S_n-\log_2 n\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(\log_2(n+1)-\log_2 n\right)\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\log_2 e$.

7. Найдите *все* непрерывные функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ с начальным условием $f(1)=2$.

Решение. Подставим $y=1$: $f(x)=f(x)f(1)-f(x+1)+1$, т.е. $f(x+1)=f(x)+1$. Откуда, с учетом начального условия, находим, что $f(z)=z+1\;\forall z\in\mathbb{Z}$ (1).

Подставив $y=\frac{1}{x}$, получим: $f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$, откуда, подставив $x=n\in\mathbb{N}$, получим $f(1)=f(n)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(n+\frac{1}{n}\right)+1$, откуда, с учетом (1), найдем $f\left(n+\frac{1}{n}\right)=(n+1)f\left(\frac{1}{n}\right)-1$ (2).

Подставим в исходное уравнение $y=1,\ x=m+\frac{1}{n}$, получим $f\left(m+\frac{1}{n}\right)=f\left(m+\frac{1}{n}\right)f(1)-f\left(m+\frac{1}{n}+1\right)+1$, т.е. $f\left(1+m+\frac{1}{n}\right)=f\left(m+\frac{1}{n}\right)+1$, откуда, используя индукцию, найдем: $f\left(m+\frac{1}{n}\right)=m+f\left(\frac{1}{n}\right)$ (3).

Подставив в (3) $m=n$, получим $f\left(n+\frac{1}{n}\right)=n+f\left(\frac{1}{n}\right)$ (4).

Тогда из (2) и (4) следует, что $(n+1)f\left(\frac{1}{n}\right)-1=n+f\left(\frac{1}{n}\right)$, т.е. $f\left(\frac{1}{n}\right)=1+\frac{1}{n}$ (5).

Тогда из (3) и (5) следует, что $f\left(m+\frac{1}{n}\right)=m+1+\frac{1}{n}$ (6).

Наконец, подставив в исходное уравнение $x=m,\ y=\frac{1}{n}$, получим: $f\left(\frac{m}{n}\right)=(m+1)f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(m+\frac{1}{n}\right)+1$, откуда, с учетом (5), (6), окончательно найдем, что $f\left(\frac{m}{n}\right)=(m+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(m+1+\frac{1}{n}\right)+1=\frac{m}{n}+1$. В силу того, что m,n - произвольные целые числа ($n\neq 0$), их отношение дает произвольное рациональное число. Таким образом, мы доказали, что для любого $r\in\mathbb{Q}$ $f(r)=r+1$.

Окончательно, в силу того, что множество рациональных чисел всюду плотно в $\mathbb{R}$, с учетом непрерывности, переходя к пределу найдем, что *единственным* непрерывным решением будет $f(x)=x+1\ \forall x\in\mathbb{R}$.

8. Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-16y+57=0 \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29} \end{cases}.$$

<u>Решение.</u> Выделяя полные квадраты, получим:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-8)^2=4^2 \\ \sqrt{(8-x)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(10-y)^2}=2\sqrt{29} \end{cases}$$

Согласно неравенству Минковского,

$$\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}+\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}\geq\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2} \qquad (*)$$

(если неравенство неизвестно, то оно не сложно выводится как простое следствие из неравенства Коши-Буняковского, которое студенты изучают на первом курсе).

В нашем случае,

$$\sqrt{(8-x)^2+(y-6)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(10-y)^2}\geq\sqrt{(8-x+x+2)^2+(y-6+10-y)^2}=2\sqrt{29}.$$

В неравенстве Минковского равенство достигается в том и только том случае, когда $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$.

Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-8)^2=4^2 \\ \frac{8-x}{x+2}=\frac{y-6}{10-y} \end{cases}.$$

Сделав замену $x-3=u,\ y-8=v$, получим систему: $\begin{cases} u^2+v^2=4^2 \\ \frac{u-5}{u+5}=\frac{v+2}{v-2} \end{cases}$, решение которой уже не представляет сложностей – находим $u=\pm\frac{20}{\sqrt{29}},\ v=\mp\frac{8}{\sqrt{29}}$, откуда окончательно находим два решения: $x=3\pm\frac{20}{\sqrt{29}},\ y=8\mp\frac{8}{\sqrt{29}}$.

<u>Замечание</u>. Оценка $(*)$ может быть получена и с помощью обычных средств векторной алгебры: Пусть $\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2)$. Тогда $|\vec{a}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}+\vec{b}|=2\sqrt{29}$ (неравенство треугольника), т.е. $(*)$. Равенство в последней оценке достигается при коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. когда $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

9. Пусть A - матрица размера 2×2 с вещественными элементами. Длины векторов-столбцов матрицы меньше единицы, а сумма произведений элементов первой строки и произведений элементов второй строки равна нулю. Докажите, что все собственные числа такой матрицы лежат внутри единичной окружности комплексной плоскости.

<u>Решение.</u> Пусть матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, λ - произвольное собственное число матрицы. Тогда, по условию задачи, $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 < 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 < 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$ и $Ax = \lambda x$.

Оценим норму:

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2} =$$

$= \sqrt{(a_{11}{}^2 + a_{21}{}^2)x_1{}^2 + 2(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})x_1x_2 + (a_{12}{}^2 + a_{22}{}^2)x_2{}^2} \le \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2} = \|x\|$, причем, для всех $x \ne 0$ неравенство выполняется как строгое, следовательно, $|\lambda| < 1$.

10. Пусть A положительно определенная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы. Докажите, что $\det A \le 1$.

<u>Решение.</u> Матрица A положительно определена, следовательно, все её собственные числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ положительны, $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. Сумма диагональных элементов называется следом матрицы и обозначается TrA. Как известно, след матрицы равен сумме её собственных чисел. Таким образом, по условию задачи, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = TrA = n$. Согласно неравенству между средним геометрическим и средним арифметическим,

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \le \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right)^n = \left(\frac{1}{n} \cdot n \right)^n = 1^n = 1.$$