СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА НИУ ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2013 г.

1. Найдите первую цифру числа 2^{400}.

2. Пусть $f(x)$ - непрерывная, монотонно возрастающая на положительной полуоси функция, причем $f(0)=0$. Докажите, что $f(x)+f^{-1}(x)\geq 2x$ для $\forall x\geq 0$.

3. Вычислите сумму ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1/n \end{vmatrix}$.

4. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{x}{y}\sqrt{x^2+y^2}$.

5. Пусть многочлен $P(x)$ не имеет вещественных корней. Докажите, что многочлен $P(x)+\frac{P''(x)}{2!}+\frac{P^{(4)}(x)}{4!}+\dots$ также не имеет вещественных корней.

6. Пусть $S_n = n-(n-1)\log_2\frac{4}{3}-(n-2)\log_2\frac{9}{8}-\dots-\log_2\frac{n^2}{n^2-1}$, $(S_1=1)$. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\left(S_n-\log_2 n\right)\right)$.

7. Найдите *все* непрерывные функции, удовлетворяющие функциональному уравнению $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ с начальным условием $f(1)=2$.

8. Найдите все решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x-16y+57=0 \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+\sqrt{x^2+y^2+4x-20y+104}=2\sqrt{29} \end{cases}.$$

9. Пусть A - матрица размера 2×2 с вещественными элементами. Длины векторов-столбцов матрицы меньше единицы, а сумма произведений элементов первой строки и произведений элементов второй строки равна нулю. Докажите, что все собственные числа такой матрицы лежат внутри единичной окружности комплексной плоскости.

10. Пусть A положительно определенная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы. Докажите, что $\det A\leq 1$.