СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2015 г.

1. Найти $f^{(2015)}(x)$, если $f(x)=\ln(1-4x^2)$.

Решение. $f'(x)=\dfrac{-8x}{1-4x^2}=\dfrac{2}{1+2x}-\dfrac{2}{1-2x}$. Тогда

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{-8x}{1-4x^2}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot 2^n(n-1)!}{(1+2x)^n}-\frac{2^n(n-1)!}{(1-2x)^n}.$$

Ответ: $f^{(2015)}(x)=2^{2015}(n-1)!\left(\dfrac{1}{(1+2x)^{2015}}-\dfrac{1}{(1-2x)^{2015}}\right)$.

2. Доказать неравенство $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...+\dfrac{1}{n+1}<\ln(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...\dfrac{1}{n}$.

Решение. На каждом промежутке $x\in[k,k+1)$, $k\in N$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{k+1}<\dfrac{1}{x}\le\dfrac{1}{k}$. После интегрирования этих неравенств по промежутку $x\in[k,k+1)$, $k\in N$ и суммирования полученных неравенств по k от 1 до n получим требуемое.

3. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a,b]$. Доказать, что для любых $x_1,x_2\in[a,b]$ найдется $x\in[a,b]$ такой, что $\int_x^{x_1}f(t)dt+\int_x^{x_2}f(t)dt=0$.

Решение. Рассмотрим функцию $g(z)=\int_z^{x_1}f(t)dt+\int_z^{x_2}f(t)dt,\ z\in[a,b]$. Она непрерывна и $g(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt$ и $g(x_2)=\int_{x_2}^{x_1}f(t)dt$. Таким образом, если $\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt=0$, то в качестве точки x можно взять любую из точек x_1 или x_2, если же $\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt\ne0$, то функция $g(x)$ принимает на концах промежутка $[x_1,x_2]$ разные знаки и, следовательно, внутри это промежутка найдется точка, где она обращается в ноль.

4. Функция $y(x),\ x\in[0,+\infty)$ удовлетворяет уравнению $y''(x)-xy(x)=x^4+1$ и начальным условиям $y(0)=1,\ y'(0)=-1$. Доказать, что

1) $\forall x\in[0,+\infty)\ \ y(x)>0$,

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{x^n}=\infty\ \ x\in N$.

Решение. 1) Допустим, что утверждение неверно. Тогда существует $x_0>0$ такой, что $y(x_0)=0,\ y(x)>0\ \ x\in[0,x_0)$. По формуле Тейлора

$y(x_0)=y(0)+y'(0)x_0+\dfrac{1}{2}y''(c)x_0^2,\quad 0<c<x_0$. Подставляя начальные данные и выражая $y''(c)$

из уравнения , получим $0=1-x_0+\frac{1}{2}\left(cy(c)+c^4+1\right)x_0^2$. Так как $cy(c)+c^4+1>1$, то

$1-x_0+\frac{x_0^2}{2}<1-x_0+\frac{cy(c)+c^4+1}{2}x_0=0$. Получили противоречие.

2) Докажем, что для любого натурального n найдется многочлен $P_{3n-1}(x)$ степени $3n-1$ с положительным коэффициентом при старшей степени такой, что $y(x)\ge P_{3n-1}(x)$.

$n=1$: Так как $y''(x)=1+x^4+xy(x)\ge 1,\quad x\ge 0$, то $y'(x)=y'(0)+\int_0^x y''(x)dx\ge -1+\int_0^x dx=x-1$.

Тогда $y(x)=y(0)+\int_0^x y'(x)dx\ge 1+\frac{x^2}{2}-x$, ч.т.д.

Допустим, что при $n=k$ верно неравенство $y(x)\ge P_{3k-1}(x)$. Тогда

$y''(x)=1+x^4+xy(x)\ge xy(x)\ge xP_{3k-1}(x)=P_{3k},\quad x\ge 0$. Интегрируя это неравенство дважды, получим требуемое.

Утверждение 2) следует из доказанного неравенства.

5. Рассмотрим последовательность функций, заданных рекуррентно: $f(x)=4x(1-x),\ f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),\ n\in\mathbb{N}$. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx$.

Решение. Мы интегрируем по отрезку $[0;1]$, а значит, можем сделать замену $x=\sin^2 t$. Тогда $f_1(x)=4\sin^2 t(1-\sin^2 t)=\sin^2 2t,\dots,\ f_n(x)=\sin^2 2^n t$.

$$\int\limits_0^1 f_n(x)dx=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2(2^n t)\cdot 2\sin t\cos t dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\cos(2^{n+1}t))\cdot\sin 2t dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2t dt-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin((2+2^{n+1})t)dt-\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}\sin((2-2^{n+1})t)dt=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\cos 2t+\frac{\cos((2+2^{n+1})t)}{2+2^{n+1}}+\frac{\cos((2-2^{n+1})t)}{2-2^{n+1}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+1+\frac{-1-1}{2+2^{n+1}}+\frac{-1-1}{2-2^{n+1}}\right)=\frac{2-2\cdot 4^n-1+2^n-1-2^n}{4(1-4^n)}=\frac{4^n}{2(4^n-1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}.$$

6. Докажите, что $\int\limits_0^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx\le\frac{\pi^3}{16}$.

Решение. Доказательство:

Лемма (Чебышев): Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют разный характер монотонности на $[a;b]$, а $p(x)$ - некоторая неотрицательная интегрируемая на $[a;b]$ функция, то

$$\int\limits_a^b p(x)dx\cdot\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx\le\int\limits_a^b p(x)f(x)dx\int\limits_a^b p(x)g(x)dx.$$

Доказательство леммы:

Рассмотрим $\Delta=\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx\int\limits_a^b p(x)dx-\int\limits_a^b p(x)f(x)dx\int\limits_a^b p(x)g(x)dx=$

$$=\int\limits_a^b p(x)f(x)g(x)dx\int\limits_a^b p(y)dy-\int\limits_a^b p(x)f(x)dx\int\limits_a^b p(y)g(y)dy=$$

$$= \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)f(x)(g(x)-g(y))dxdy = \int_a^b \int_a^b p(y)p(x)f(y)(g(y)-g(x))dydx$$

Следовательно, $\Delta = \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b p(y)p(x)(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))dydx$

В силу различной монотонности функций $f(x)$ и $g(x)$, $(f(x)-f(y))$ и $(g(x)-g(y))$ будут иметь разные знаки, т.е. их произведение всегда неположительное, а функции $p(x)$ и $p(y)$ неотрицательны по условию, значит, мы интегрируем всюду неположительную функцию => $\Delta \le 0$.

$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\sin x \frac{1}{\sin x}dx$. Пусть $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, $g(x) = \frac{1}{\sin x}$, $p(x) = \sin x$. Очевидно, что функция $p(x)$ на всем промежутке неотрицательная и интегрируемая, $g(x)$ убывает. Покажем, что $f(x)$ возрастает: $f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(tgx - x)}{\sin^2 x} \ge 0$ (воспользовались хорошо известным и легко доказываемым неравенством $tgx > x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$). Следовательно

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}dx \le \frac{\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x}\sin xdx \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\sin xdx}{\int_0^{\pi/2} \sin xdx} = \frac{\int_0^{\pi/2} xdx \int_0^{\pi/2} dx}{\int_0^{\pi/2} \sin xdx} = \frac{\pi^3}{16}.$$

7. Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируема на $[a,b]$, $a \ge 0$ и для любого $x \in (a,b)$ $f(x) > 0,\ f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$. Известно, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ отсекает от осей координат треугольник наименьшей площади. Доказать, что эта площадь $S_{\min} = 2x_0 \cdot f(x_0)$.

Решение. Уравнение касательной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Точки пересечения касательной с осями координат будут $x_1 = 0,\ y_1 = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ и $x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},\ y_2 = 0$. Удвоенная площадь треугольника, отсекаемого касательной от координатных осей будет равна произведению

$$2S = y_1x_2 = (f(x_0) - f'(x_0)x_0)\left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = -\frac{(x_0f'(x_0) - f(x_0))^2}{f'(x_0)}.$$

Дифференцируя эту функцию по переменной x_0, получим $(2S)' = -\frac{f'(x_0)f''(x_0)(x_0f'(x_0) - f(x_0))}{(f'(x_0))^2}\left(x + \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right) = 0$, откуда $x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ и, очевидно, что это точка минимума. В этой точке $2S = -\frac{4f^2(x_0)}{f'(x_0)} = 4x_0f(x_0)$.

8. Докажите, что в любом треугольнике радиус описанной окружности не менее, чем в два раза превосходит радиус вписанной окружности.

Решение. Обозначим через a, b, c длины сторон треугольника, через R и r радиусы описанной и вписанной окружностей, соответственно. Тогда $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, где S - площадь треугольника. $\dfrac{abc}{4S} \geq \dfrac{2S}{a+b+c} \Leftrightarrow abc(a+b+c) \geq 16S^2$.

По формуле Герона $S = \sqrt{\dfrac{a+b+c}{2}\dfrac{a+b-c}{2}\dfrac{a+c-b}{2}\dfrac{b+c-a}{2}}$.

$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc(a+b+c)$, $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leq abc$.

По неравенству Коши, $(a+b-c)(a+c-b) \leq \left(\dfrac{(a+b-c)+(a+c-b)}{2}\right)^2 = a^2$,

$(a+c-b)(b+c-a) \leq \left(\dfrac{(a+c-b)+(b+c-a)}{2}\right)^2 = c^2$,

$(a+b-c)(b+c-a) \leq \left(\dfrac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\right)^2 = b^2$

Возводя в квадрат обе части доказываемого неравенства и применяя оценки по неравенству Коши, получаем требуемый результат.

9. Пусть F – обратимая матрица размером $2n \times 2n$, представленная в блочном виде:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},\ F^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Найти $\det F \cdot \det N$.

Решение. Пусть E – единичная матрица размером $n \times n$. Тогда

$$\det F \cdot \det N = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} E & L \\ 0 & N \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & E \end{pmatrix} = \det A.$$

10. Тригонометрические функции от квадратных матриц определяются следующим образом: $\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$, $\cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ вычислите $\sin^2(A) + \cos^2(A)$.

Решение. Найдём собственные числа соответствующие собственные векторы матрицы A:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 4-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda) = 0 \text{ при } \lambda = 1, \lambda = 4, \lambda = 6$$

(диагональные элементы, разумеется, являются собственными числами треугольной матрицы). Соответствующими им собственными векторами будут $(1,0,0)$, $(2,3,0)$, $(16,25,10)$. Таким образом, собственные векторы образуют базис.

Покажем, что этого достаточно, чтобы выполнялось равенство $\sin^2(A) + \cos^2(A) = \mathrm{E}$ (единичная матрица).

В базисе из собственных векторов матрица может быть представлена в виде $A = H \Lambda H^{-1}$, где H - матрица собственных векторов, Λ - диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные числа матрицы в порядке их следования в базисе (в нашем случае $H=\begin{pmatrix}1 & 2 & 16\\ 0 & 3 & 25\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$).

Тогда $A^k=(H\Lambda H^{-1})(H\Lambda H^{-1})...(H\Lambda H^{-1})=H\Lambda^k H^{-1}$.

Λ - диагональная матрица, а значит, на диагонали будут стоять соответствующие степени собственных чисел матрицы (у нас $\Lambda^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4^k & 0\\ 0 & 0 & 6^k\end{pmatrix}$). И тогда $\sin(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}A^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(H\Lambda^{2k+1}H^{-1})=H\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Lambda^{2k+1}\right)H^{-1}$. Внедиагональные элементы матрицы $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Lambda^{2k+1}$ будут нулями, на диагонали будут стоять синусы собственных чисел. Тогда $\sin^2(A)=H\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Lambda^{2k+1}\right)^2 H^{-1}$ (на диагонали внутренней матрицы будут стоять квадраты синусов). Аналогично $\cos^2(A)=H\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\Lambda^{2k}\right)^2 H^{-1}$ (на диагонали внутренней матрицы будут стоять квадраты косинусов). И тогда по основному тригонометрическому тождеству, $\sin^2(A)+\cos^2(A)=HEH^{-1}=HH^{-1}=\mathrm{E}$.