

**СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
УНИВЕРСИТЕТА ИТМО
ПО МАТЕМАТИКЕ 2015 г.**

1. Найти $f^{(2015)}(x)$, если $f(x) = \ln(1-4x^2)$.

2. Доказать неравенство $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

3. Пусть $f(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$. Доказать, что для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ найдется $x \in [a, b]$ такой, что $\int_x^{x_1} f(t) dt + \int_x^{x_2} f(t) dt = 0$.

4. Функция $y(x)$, $x \in [0, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $y''(x) - xy(x) = x^4 + 1$ и начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$. Доказать, что

1) $\forall x \in [0, +\infty) y(x) > 0$,

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x^n} = \infty \quad x \in \mathbb{N}$.

5. Рассмотрим последовательность функций, заданных рекуррентно:

$$f(x) = 4x(1-x), f_1(x) = f(x), f_{n+1}(x) = f(f_n(x)), n \in \mathbb{N}. \text{ Вычислите } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

6. Докажите, что $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx \leq \frac{\pi^3}{16}$.

7. Пусть $f(x)$ - дважды дифференцируема на $[a, b]$, $a \geq 0$ и для любого $x \in (a, b)$ $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$. Известно, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ отсекает от осей координат треугольник наименьшей площади. Доказать, что эта площадь $S_{\min} = 2x_0 \cdot f(x_0)$.

8. Докажите, что в любом треугольнике радиус описанной окружности не менее, чем в два раза превосходит радиус вписанной окружности.

9. Пусть F - обратимая матрица размером $2n \times 2n$, представленная в блочном виде:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, F^{-1} = \begin{pmatrix} K & L \\ M & N \end{pmatrix}.$$

Найти $\det F \cdot \det N$.

10. Тригонометрические функции от квадратных матриц определяются следующим образом:

$$\sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \quad \cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}.$$

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ вычислите $\sin^2(A) + \cos^2(A)$.