СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2017 г.

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2}{n!}$.

2. Можно ли из произведения $A=1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot 100!$ выкинуть один факториал так, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

3. Пусть $S_0=\{z\in C\,|\,|z|=1, z\neq -1\}$ и $f(z)=\frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z}$. Докажите, что функция $f(z)$ взаимно однозначно отображает множество S_0 на R и найдите обратную функцию.

4. $\Phi(x)$ дифференциального уравнения $y''-2y'+y=2e^x$ таково, что $\Phi'(x)>0\ \ x\in R$. Будет ли $\Phi(x)>0\ \ x\in R$?

5. Пусть $P(x)$ многочлен степени n, имеющий n различных корней $x_{1,}\ x_2,\ldots x_n$.
Докажите, что $\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=0$.

6. Вычислить интеграл $\int\left(5\sqrt{x^3+1}-\frac{3}{\sqrt{x^3+1}}\right)dx$.

7. Докажите, что число $7^{7^n}+1$ является произведением не меньше, чем $2n+3$ простых чисел (необязательно различных), n – натуральное число. Запись 7^{7^n} следует понимать как $7^{\left(7^n\right)}$.

8. Средствами векторной алгебры доказать неравенство:

$$|\cos\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta|\le\sqrt{2},$$

где α,β,γ - направляющие косинусы некоторого вектора. Выяснить, когда выполняется знак равенства.

9. Плоская замкнутая кривая называется выпуклой, если она является границей плоской выпуклой области. В свою очередь, область называется выпуклой, если любые две точки, принадлежащие области, могут быть соединены отрезком, целиком лежащим внутри этой области. Докажите, что если любая проекция замкнутой пространственной кривой является выпуклой, то эта кривая плоская.

10. При каких натуральных *n* существует квадратная матрица порядка *n* с элементами *0, 1* такая, что её квадрат - это матрица из одних единиц? Построить содержательный пример такой матрицы.