СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА УНИВЕРСИТЕТА ИТМО ПО МАТЕМАТИКЕ 2017 г.

1. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-2}{n!}$.

<u>Решение</u>. Запишем общий член ряда в виде
$\frac{n^2-2}{n!}=\frac{n^2-n+n-2}{n!}=\frac{n(n-1)+n-2}{n!}=\frac{1}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}$. Тогда частная сумма ряда

будет $\sum_{n=2}^{m}\frac{n^2-2}{n!}=1+1-\frac{2}{2!}+1+\frac{1}{2!}-\frac{2}{3!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{2}{4!}+...+\frac{1}{(n-2!)}+\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}=3-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{2}{(n-2)!}$

. Переходя к пределу при $m\to\infty$, получим $S=3$.

2. Можно ли из произведения $A=1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot....\cdot 100!$ выкинуть один факториал так, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа?

<u>Решение.</u> Очевидно, что в данном произведении содержится 100 единиц, 99 двоек, 98 троек и т.д. Поэтому это произведение может быть записано в виде
$A=2^{99}\cdot 3^{98}\cdot 4^{97}\cdot...\cdot 100=x^2\cdot 2\cdot 4\cdot...\cdot 100=x^2\cdot 2^{50}\cdot 50!=\left(2^{25}x\right)^2\cdot 50!$.

Отсюда следует, что, если из данного произведения выбросить $50!$, то оставшееся произведение будет квадратом целого числа.

3. Пусть $S_0=\left\{z\in C\,|\,|z|=1, z\neq -1\right\}$ и $f(z)=\frac{\operatorname{Im} z}{1+\operatorname{Re} z}$. Докажите, что функция $f(z)$ взаимно однозначно отображает множество S_0 на R и найдите обратную функцию.

<u>Решение</u>. Положим $z=\cos t+i\sin t,\ \ t\in(-\pi,\pi)$, тогда $f(z)=g(t)=\frac{\sin t}{1+\cos t}$.

Функция $g(t)$ возрастает на $(-\pi,\pi)$, так как $g'(t)=\frac{1}{1+\cos t}>0$ и

$\lim\limits_{t\to-\pi+0} g(t)=\lim\limits_{t\to-\pi+0}\operatorname{tg}\frac{t}{2}=-\infty$, а $\lim\limits_{t\to\pi-0} g(t)=\lim\limits_{t\to\pi-0}\operatorname{tg}\frac{t}{2}=+\infty$.

Поэтому $g(t)$, а, следовательно, и $f(z)$ является взаимно-однозначным соответствием.

Найдем обратную функцию: $y=\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Rightarrow t=2\operatorname{arctg} y\Rightarrow z=e^{2i\operatorname{arctg} y}\quad y\in(-\infty,\infty)$.

4. $\Phi(x)$ дифференциального уравнения $y''-2y'+y=2e^x$ таково, что $\Phi'(x)>0 \ \ x\in R$. Будет ли $\Phi(x)>0 \ \ x\in R$?

Решение. Решая дифференциальное уравнение, получим общее решение: $y=C_1e^x+C_2xe^x+x^2e^x$. Производная $y'=C_1e^x+C_2e^x+C_2xe^x+2xe^x+x^2e^x=e^x\left(x^2+x\left(C_2+2\right)+\left(C_1+C_2\right)\right)$ будет положительна при любом значении x если дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, т.е. $\left(C_2+2\right)^2-4\left(C_1+C_2\right)=C_2^2-4C_1+4<0$. Отсюда $C_1>\frac{C_2^2}{4}+1$ и $y>e^x\left(\frac{C_2^2}{4}+1+C_2x+x^2\right)$. Дискриминант последнего квадратного трехчлена $C_2^2-C_2^2-4=-4<0$, значит, взятое решение будет положительно при любом значении x.

5. Пусть $P(x)$ многочлен степени n, имеющий n различных корней $x_{1,}\ x_2,\ldots x_n$. Докажите, что $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=0$.

Решение. Возьмем произвольный набор чисел $y_1,y_2,\ldots y_n$. Тогда можно единственным способом определить многочлен степени, меньшей чем n, который в точках $x_{1,}\ x_2,\ldots x_n$ принимает значения $y_1,y_2,\ldots y_n$. Нетрудно видеть, что этот многочлен можно найти по формуле $S(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{y_kP(x)}{(x-x_k)P'(x_k)}$.

Так как многочлен $P''(x)$ является многочленом степени $n-2$, то по указанной формуле $P''(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)\cdot P(x)}{(x-x_k)P'(x_k)}$, где коэффициент при степени $n-1$ справа равен нулю. Так как этот коэффициент равен $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}$, то требуемое равенство доказано.

6. Вычислить интеграл $\int\left(5\sqrt{x^3+1}-\frac{3}{\sqrt{x^3+1}}\right)dx$.

Решение. Пусть $I_1=\int\sqrt{x^3+1}$ и $I_2=\int\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Тогда, интегрируя по частям, получим

$$I_1 = \int \sqrt{x^3+1} = x\sqrt{x^3+1} - \frac{3}{2}\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^3+1}} = x\sqrt{x^3+1} - \frac{3}{2}\int \frac{\left(x^3+1\right)-1}{\sqrt{x^3+1}}dx = x\sqrt{x^3+1} - \frac{3}{2}I_1 + \frac{3}{2}I_2$$, откуда

$$I_1 = \frac{2}{5}\left(x\sqrt{x^3+1} + \frac{3}{2}I_2\right).$$

Тогда $\int \left(5\sqrt{x^3+1} - \frac{3}{\sqrt{x^3+1}}\right)dx = 5I_1 - 3I_2 = 2x\sqrt{x^3+1} + 3I_2 - 3I_2 = 2x\sqrt{x^3+1} + C$.

7. Докажите, что число $7^{7^n}+1$ является произведением не меньше, чем $2n+3$ простых чисел (необязательно различных), n – натуральное число. Запись 7^{7^n} следует понимать как $7^{\left(7^n\right)}$.

<u>Решение</u>. Заметим, что далее для удобства записи мы пишем $7^{7^n} = 7\hat{}7\hat{}n.$ Доказательство проводится индукцией. База для случая *n=0* практически очевидна*:* *7^7^0+ 1 = 7^1 + 1 = 2^3.* Для доказательства индукционного перехода достаточно доказать, что если *x = 7^(2m−1)* для некоторого натурального m то число *(x^7 + 1)/(x + 1)* составное. Для этого заметим, что *x^ +1/(x +1 =[(x + 1)^7 −((x + 1)^7 − (x^7 + 1))]/(x + 1)*

= (x + 1)^6 −7x(x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 3x + 1)/(x + 1)

= (x + 1)^6 − 7x(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)

= (x + 1)^6 − 7^2m(x^2 + x + 1)^2

= {(x + 1)^3 − 7^m(^x2 + x + 1)}{(x + 1)^3 + 7^m(x2 + x + 1)}

При этом каждый из множителей больше *1.*Для доказательства этого достаточно оценить наименьший: $\sqrt{7x} \le x$, следовательно

(x + 1)^3 − 7^m(x2 + x + 1) = (x + 1)^3 − $\sqrt{7x}$ *(x^2 + x + 1)*

≥ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 − x(x^2 + x + 1)

= 2x^2 + 2x + 1 ≥ 113 > 1.

Следовательно, число *(x^7 + 1)/(x + 1)* является составным и это завершает доказательство.

8. Средствами векторной алгебры доказать неравенство:

$$\left|\cos\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\beta\cdot\sin\alpha+\cos\gamma\cdot\sin\beta\right|\le\sqrt{2},$$

где α,β,γ - направляющие косинусы некоторого вектора. Выяснить, когда выполняется знак равенства.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{a}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),\vec{b}=(\sin\gamma,\sin\alpha,\sin\beta)$. Из свойства направляющих косинусов углов вектора $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ получаем: $|\vec{a}|^2=1,\ |\vec{b}|^2=2.$ Используя неравенство Шварца $\left|(\vec{a}\cdot\vec{b})\right|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, сразу получаем требуемое в условии неравенство.

Докажем, что знак равенства достигается в нем только в случае $\alpha=\beta=\gamma$. Из условия превращения неравенства Шварца в равенство, т.е. из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем: $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ находим $\sqrt{2}=\left|(\vec{a}\cdot\vec{b})\right|=\left|(\lambda\cdot\vec{a}^2)\right|=|\lambda|$, т.е. $\lambda=\pm\sqrt{2}$ и, следовательно,

$$\begin{cases}\sin\gamma=\pm\sqrt{2}\cos\alpha,\\ \sin\alpha=\pm\sqrt{2}\cos\beta,\\ \sin\beta=\pm\sqrt{2}\cos\gamma,\end{cases}\quad(*)\Rightarrow\begin{cases}1/2\sin^2\gamma=\cos\alpha^2=1-\sin^2\alpha,\\ 1/2\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta,\\ 1/2\sin^2\beta=1-\sin^2\gamma,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha+1/2\sin^2\gamma=1,\\ 1/2\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1,\\ 1/2\sin^2\beta+\sin^2\gamma=1.\end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение: $\sin^2\alpha+1/2\sin^2\gamma=1=1/2\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right)\Rightarrow\sin^2\alpha=\sin^2\beta.$ Аналогично из второго уравнения: $\sin^2\beta=\sin^2\gamma$. Итак, $\sin^2\alpha=\sin^2\beta=\sin^2\gamma\Rightarrow\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ (с учетом того, что синусы направляющих углов неотрицательны). Покажем, что $\alpha=\beta=\gamma$. Действительно, если бы $\beta=\pi-\alpha$, то это противоречило бы 2-му уравнению системы $(*)$.

9. Плоская замкнутая кривая называется выпуклой, если она является границей плоской выпуклой области. В свою очередь, область называется выпуклой, если любые две точки, принадлежащие области, могут быть соединены отрезком, целиком лежащим внутри этой области. Докажите, что если любая проекция замкнутой пространственной кривой является выпуклой, то эта кривая плоская.

Решение. Если пространственная кривая не плоская, то на ней существуют четыре точки A,B,C,D, не лежащие в одной плоскости. Выберем любую внутреннюю точку E треугольника ABC и спроектируем кривую вдоль направления DE. Проекции точек A,B,C - вершины треугольника, а проекция точки D расположена внутри этого треугольника, что для выпуклой кривой невозможно.

10. При каких натуральных n существует квадратная матрица порядка n с элементами $0,\ 1$ такая, что её квадрат - это матрица из одних единиц? Построить содержательный пример такой матрицы.

Ответ. При точных квадратах, т.е. $n = k^2$.

Решение. Пусть U – матрица из одних единиц. Рассмотрим внимательно равенство $A^3 = AU = UA.$. С одной стороны у этой матрицы по строчкам стоит число единиц в строчках матрицы A, с другой стороны – по столбцам число единиц в столбцах матрицы A. Из этого следует, что в матрице A одинаковое число единиц в каждой строке и в каждом столбце, обозначим его через k. Теперь рассмотрим равенство $A^4 = AAU = U^2$, из которого заключаем, что $n=k^2$, где n – порядок матриц.

Остается построить пример матрицы A порядка k^2, вторая степень которых равна U. Для этого надо взять k матриц порядка k (первая – единичная, а каждая следующая получается из предыдущей циклическим сдвигом всех единиц вправо) и составить из них первые k строчек матрицы A (она как бы строится из блоков $k \times k$). Далее нужно просто повторить эти k первых строчек еще $(k\text{-}1)$ раз без изменений. Квадрат полученной матрицы A будет равен U.