СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
УНИВЕРСИТЕТА ИТМО
ПО МАТЕМАТИКЕ 2018 г.

1. В ходе боевых действий армия страны A победила армию страны B. В армии страны A осталось 2018 воинов. Хитрый правитель страны B предложил следующие репарации: страна B безвозмездно передаёт воинам страны A 2018 саженей прямолинейной береговой линии, воины страны A имеют право поделить между собой участок в любом соотношении, но с условием: участок земли у каждого воина должен быть квадратным. Докажите, что честное деления участка между воинами (все получают равные участки) наиболее невыгодное решение для страны A.

2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{a^k}$ при каждом возможном значении вещественного параметра a.

3. Пусть $f(x)=(\sin x+3\sin 3x+5\sin 5x+...+21\sin 21x)\sin x$. Вычислить $f\left(\frac{\pi}{22}\right)$.

4. Докажите, что для любого решения дифференциального уравнения $4y'''+30y''+72y'+55y=0$ найдется такое число $C>0$, что для любого $x\in[0,+\infty)$ будет выполняться неравенство $|y(x)|\le Ce^{-x}$.

5. Даны три последовательности $\{a_n=f(n)\}$, $\{b_n=g(n)\}$, $\{c_n=h(n)\}$, причем функции $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ отображают множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Найти последовательность c_n, если известно, что функция $f(n)$ - сюрьекция, т.е. множество ее значений - $\mathbb{N}$, а функция $g(n)$ - инъективна, (т.е. взаимно однозначно отображает $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) и для всех значений n выполняется соотношение $c_n=a_n-b_n+1$.

6. Три плоскости в трехмерном пространстве заданы в общей декартовой системе координат уравнениями $A_i x+B_i y+C_i z+D_i=0$. (i=1,2,3). Сформулировать в терминах рангов и доказать условия на коэффициенты уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости:
1) совпадали
2) имели единственную общую точку
3) имели единственную общую прямую
4) были параллельными, но не все совпадали
5) образовывали бы призму

7. Определить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg}^2 n}{n^{1+|\operatorname{tg} n|}}$.

8. Квадратная матрица **A** имеет левую обратную матрицу. Обратима ли исходная матрица и ее левая обратная? Ответ обосновать.

9. Из точки M(1,1) проведены касательные к двум ветвям гиперболы y=k/x (k<0), касающиеся этих ветвей в точках A и B. Известно, что треугольник MAB равносторонний. Вычислить 12k.

10. Найти все непрерывные и заданные на множестве вещественных чисел функции, удовлетворяющие уравнению 3f(2x+1)=f(x)+5.