СТУДЕНЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА
УНИВЕРСИТЕТА ИТМО
ПО МАТЕМАТИКЕ 2018 г.

Задача 1. В ходе боевых действий армия страны A победила армию страны B. В армии страны A осталось 2018 воинов. Хитрый правитель страны B предложил следующие репарации: страна B безвозмездно передаёт воинам страны A 2018 саженей прямолинейной береговой линии, воины страны A имеют право поделить между собой участок в любом соотношении, но с условием: участок земли у каждого воина должен быть квадратным. Докажите, что честное деления участка между воинами (все получают равные участки) наиболее невыгодное решение для страны A.

Решение 1: Попробуем найти самое невыгодное решение. Задача формализуется следующим образом: $\sum_{k=1}^{2018} x_k^{\,2} \to \min$ при условии, что $\sum_{k=1}^{2018} x_k = 2018,\ x_k \ge 0\ \forall k = 1,..,2018$.

По неравенству Коши-Буняковского: $\sum_{k=1}^{2018} x_k^{\,2} \sum_{k=1}^{2018} 1^2 \ge \left(\sum_{k=1}^{2018} 1\cdot x_k\right)^2 = 2018^2$, следовательно, $\sum_{k=1}^{2018} x_k^{\,2} \ge 2018$, равенство достигается при $x_k = 1\ \forall k = 1,..,2018$.

Решение 2: С геометрической точки зрения нас интересует значение квадрата расстояния от гиперплоскости $\sum_{k=1}^{2018} x_k = 2018$ до начала координат (в 2018-мерном евклидовом пространстве). Но расстояние от точки $M_0(X_1,..,X_n)$ до гиперплоскости $\sum_{k=1}^{n} a_k x_k - d = 0$, как хорошо известно, находится по формуле: $\rho = \dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k X_k - d\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^{\,2}}}$. В нашем случае получим: $\rho = \dfrac{\left|\sum_{k=1}^{2018} 1\cdot 0 - 2018\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{2018} 1^2}} = \sqrt{2018}$, следовательно,

$\rho^2 = 2018$.

Решение 3: Составим функцию Лагранжа: $L(x) = \sum_{k=1}^{2018} x_k^{\,2} - \lambda\left(\sum_{k=1}^{2018} x_k - 2018\right)$.

$$\frac{\partial L(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{2018} x_k^{\,2} - \lambda\left(\sum_{k=1}^{2018} x_k - 2018\right)\right) = 2x_i - \lambda = 0\ \forall i = 1,..,2018$$

, откуда

$x_1 = x_2 = ... = x_{2018} = \lambda/2$, следовательно, $2018 = \sum_{k=1}^{2018} x_k = \sum_{k=1}^{2018} \frac{\lambda}{2} = 2018\cdot\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_k = \frac{\lambda}{2} = 1\ \ \forall k = 1,..,2018$.

Все значения получились неотрицательными. Легко увидеть, что в найденной точке достигается именно минимум: $\dfrac{\partial^2 L(x)}{\partial x_i \partial x_j} = 0,\ i \ne j,\ \dfrac{\partial^2 L(x)}{\partial x_i^{\,2}} = 2 > 0$.

Следовательно, $\sum_{k=1}^{2018} x_k^{\,2} = \sum_{k=1}^{2018} 1^2 = 2018$.

Задача 2. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin\frac{\pi k}{n}}{a^k}$ при каждом возможном значении вещественного параметра a.

Решение:.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\pi k}{n}}{a^k} = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{i\pi k}{n}}}{a^k} = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{a}\right)^k = \operatorname{Im}\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}/a}{e^{\frac{i\pi}{n}}/a-1}(e^{i\pi}/a^n-1)=$$

$$=-\frac{1}{a^n}\operatorname{Im}\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{e^{\frac{i\pi}{n}}-a}(a^n+1) = -\frac{a^n+1}{a^n}\operatorname{Im}\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}(e^{-\frac{i\pi}{n}}-a)}{(e^{\frac{i\pi}{n}}-a)(e^{-\frac{i\pi}{n}}-a)} = \left(1+\frac{1}{a^n}\right)\operatorname{Im}\frac{a e^{\frac{i\pi}{n}}-1}{1+a^2-a(e^{\frac{i\pi}{n}}+e^{-\frac{i\pi}{n}})}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\operatorname{Im}\frac{a\cos\frac{\pi}{n}-1+ia\sin\frac{\pi}{n}}{1+a^2-2a\cos\frac{\pi}{n}} = \left(1+\frac{1}{a^n}\right)\frac{a\sin\frac{\pi}{n}}{1+a^2-2a\cos\frac{\pi}{n}}.$$

При $a=0$ выражение не определено.

При $a=1$: $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\frac{a\sin\frac{\pi}{n}}{1+a^2-2a\cos\frac{\pi}{n}}\Bigg|_{a=1} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{2(1-\cos\frac{\pi}{n})} = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}} \sim \frac{\frac{\pi}{n}}{2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty.$

$\frac{a}{1+a^2-2a\cos\frac{\pi}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{a}{(a-1)^2}$. При $|a|>1$ или $a=-1$: $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

При $|a|<1$, $a\neq 0$: $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\sin\frac{\pi}{n}\sim\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{na^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0+\infty=\infty$

Ответ: $\begin{cases} +\infty \text{ } \textit{при } 0<a\le 1 \\ \infty \text{ } (\textit{неопределённого знака}) \text{ при } -1<a<0 \\ 0 \text{ } \textit{при } a\in(-\infty,-1]\cup(1;+\infty) \end{cases}$

<u>Задача 3.</u> Пусть $f(x)=(\sin x+3\sin 3x+5\sin 5x+\ldots+21\sin 21x)\sin x$. Вычислить $f\left(\frac{\pi}{22}\right)$.

Решение. Рассмотрим функцию $g(x)=\sin x+3\sin 3x+5\sin 5x+\ldots+21\sin 21x$. Проинтегрируем ее по промежутку от $\frac{\pi}{2}$ до x:

$$\int_{\pi/2}^{x} g(x)\,dx = -\cos x-\cos 3x-\ldots-\cos 21x=$$
$$=-\frac{1}{2\sin x}(\sin 2x-\sin 2x+\sin 4x-\sin 4x+\ldots-\sin 20x+\sin 22x)=$$
$$=-\frac{\sin 22x}{2\sin x}$$

Отсюда $g(x) = -\frac{22\cos 22x \sin x - \cos x \sin 22x}{2\sin^2 x}$.

Тогда $f\left(\frac{\pi}{22}\right) = g\left(\frac{\pi}{22}\right)\sin\frac{\pi}{22} = 11$.

Задача 4. Докажите, что для любого решения дифференциального уравнения $4y''' + 30y'' + 72y' + 55y = 0$ найдется такое число $C > 0$, что для любого $x \in [0, +\infty)$ будет выполняться неравенство $|y(x)| \le Ce^{-x}$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид: $4t^3 + 30t^2 + 72t + 55 = 0$ ..
Исследуя многочлен $4t^3 + 30t^2 + 72t + 55$ легко видеть, что его корни лежат на промежутках: $t_1 < -3$, $-3 < t_2 < -2$ и $-2 < t_3 < -1$. Поэтому каждое решение уравнения имеет вид $y(x) = C_1e^{t_1x} + C_2e^{t_2x} + C_3e^{t_3x}$, откуда следует, что для положительных значений x выполняется неравенство
$|y(x)| \le |C_1e^{t_1x}| + |C_2e^{t_2x}| + |C_3e^{t_3x}| \le (|C_1| + |C_2| + |C_3|)e^{-x}$.

Задача 5. Даны три последовательности $\{a_n = f(n)\}$, $\{b_n = g(n)\}$, $\{c_n = h(n)\}$, причем функции $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ отображают множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Найти последовательность c_n, если известно, что функция $f(n)$ сюръективна (т.е. взаимно однозначно отображает $\mathbb{N}$ на себя), а функция $g(n)$ инъективна, (т.е. взаимно однозначно отображает $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$) и для всех значений n выполняется соотношение $c_n = a_n - b_n + 1$.

Решение. Так как $b_n = a_n - c_n + 1$, то $b_n \le a_n$. Докажем , что для всех n выполняется равенство.
Допустим противное, т.е. допустим, что найдется значение k, при котором $b_k < a_k = m$.
Так как отображение $f(n)$ является сюръекцией, то для каждого $i = 1, 2, ..., m-1$ найдутся номера n_i такие, что $a_{n_1} = i$, следовательно, для всех таких n_i будет выполнятся неравенство $b_{n_i} \le a_{n_i} = i < m$. А это означает, что найдется номер $n_i \ne k$, при котором $b_{n_i} = b_k$, что противоречит тому, что $g(n)$ инъекция.
Следовательно, всегда $b_n = a_n$ и $c_n = 1$.

Задача 6. Три плоскости в трехмерном пространстве заданы в общей декартовой системе координат уравнениями $A_i x+B_iy+C_iz+D_i=0$. (i=1,2,3). Сформулировать в терминах рангов и доказать условия на коэффициенты уравнений, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости:
1) совпадали
2) имели единственную общую точку
3) имели единственную общую прямую
4) были параллельными, но не все совпадали
5) образовывали бы призму

Решение. Пусть $r = Rg\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{Vmatrix}$ и $R = Rg\begin{Vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{Vmatrix}$

Тогда для того, чтобы плоскости
1) совпадали, необходимо и достаточно, чтобы $r = R = 1$;
2) имели единственную общую точку, необходимо и достаточно, чтобы $r = R = 3$;

3) имели единственную общую прямую, необходимо и достаточно, чтобы $r = R = 2$;

4) были параллельными, но не все совпадали, необходимо и достаточно, чтобы $r = 1$; $R = 2$;

5) образовывали бы призму, необходимо и достаточно, чтобы $r = 2$; $R = 3$.

Впрочем, ответ «пункт 5) решений не имеет (сформулирован некорректно – мало плоскостей)» тоже засчитывается; хотя в условии задачи имеется в виду «физическое» истолкование призмы – т.е. бесконечной призматической поверхности.

Задача 7. Определить, сходится или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^2 n}{n^{1+|\operatorname{tg} n|}}$.

Решение. При фиксированном значении $n \geq 2$ рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2}{n^{1+x}}.$$

Её производная

$$f'(x) = \frac{2xn^{1+x} - x^2 n^{1+x} \ln n}{(n^{1+x})^2} = \frac{x}{n^{1+x}}(2 - x\ln n).$$

Поэтому своё максимальное значение на промежутке $[0, +\infty)$ она принимает в точке $x = 2/\ln n$. При $n \geq 2$ имеем

$$0 \leq \frac{\operatorname{tg}^2 n}{n^{1+|\operatorname{tg} n|}} \leq f\left(\frac{2}{\ln n}\right) = \frac{4}{(\ln n)^2 n^{1+2/\ln n}} \leq \frac{4}{n^{2/\ln 2}} \frac{1}{n \ln^2 n} \leq \frac{4}{n \ln^2 n}.$$

По интегральному признаку ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ сходится, следовательно, сходится и исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^2 n}{n^{1+|\operatorname{tg} n|}}$.

Задача 8. Квадратная матрица $\mathbf{A}$ имеет левую обратную матрицу. Обратима ли исходная матрица и ее левая обратная? Ответ обосновать.

Решение. Обозначим левую обратную матрицу к $\mathbf{A}$ через $\mathbf{B}$. Тогда справедливо равенство $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ - единичная матрица. По теореме об умножении определителей имеем: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = \det \mathbf{E} = 1$. Поэтому обе матицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ - невырожденные (их определители отличны от 0), и, следовательно, обе они являются обратимыми.

Задача 9. Из точки $M(1,1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы y=k/x (k<0), касающиеся этих ветвей в точках A и B. Известно, что треугольник MAB равносторонний. Вычислить 12k.

Решение. Уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{k}{x}$ в точке $\left(x_0; \frac{k}{x_0}\right)$ имеет следующий вид:

$$y = \frac{k}{x_0} - \frac{k}{x_0^2}(x - x_0).$$

Интересующие нас касательные проходят через точку $M(1,1)$. Поэтому

$$1 = \frac{k}{x_0} - \frac{k}{x_0^2}(1 - x_0).$$

Решая это уравнение относительно x_0, находим: $x_0 = k \pm \sqrt{k^2 - k}$. Поэтому точки касания имеют координаты $A\left(k - \sqrt{k^2 - k}; k + \sqrt{k^2 - k}\right)$, $B\left(k + \sqrt{k^2 - k}; k - \sqrt{k^2 - k}\right)$. Поскольку гипербола симметрична относительно прямой $y = x$, на которой лежит точка M, имеем $AM=BM$. Поэтому для того, чтобы треугольник MAB был правильным, необходимо и достаточно выполнение равенства

AB=*AM*. Отсюда следует, что $8\left(k^2-k\right)=4k^2-6k+2$ и $k=-\frac{1}{2}$, $12k=-6$ (поскольку $k<0$).

Ответ: -6.

<u>Задача 10.</u> Найти все непрерывные и заданные на множестве вещественных чисел функции, удовлетворяющие уравнению 3f(2x+1)=f(x)+5.

Решение. Положим $t=2x+1$, тогда $x=(t-1)/2$ и

$$f(t)=\frac{5}{3}+\frac{1}{3}f\left(\frac{t-1}{2}\right).$$

Определим последовательность функций $\phi_n(t)$ следующим образом:

$$\phi_1(t)=\frac{t-1}{2},$$
$$\phi_n(t)=\phi(\phi_{n-1}(t)).$$

Производя последовательные подстановки вида $t=\phi_k(t)$ в выражение, полученное для функции f, находим

$$\begin{aligned} f(t) \quad &= \frac{5}{3}+\frac{1}{3}f(\phi_1(t)) = \\ &= \frac{5}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{1}{3^2}f(\phi_2(t)) = \\ &= \frac{5}{3}+\frac{5}{3^2}+\frac{5}{3^3}+\frac{1}{3^3}f(\phi_3(t)) = \\ &\ldots \\ &= 5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^n}f(\phi_n(t)). \end{aligned}$$

При помощи метода математической индукции легко установить, что

$$\phi_n(t)=\frac{t+1}{2^n}-1.$$

Следовательно,

$$f(t)=5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^n}f\left(\frac{t+1}{2^n}-1\right).$$

Принимая во внимание непрерывность функции f и переходя к пределу при $n\to\infty$ в последнем равенстве, получаем

$$f(t)=5\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}+0\cdot f(-1)=\frac{5}{2}.$$

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что функция $f(x)\equiv 5/2$ действительно является его решением.