

**Олимпиада Санкт-Петербурга для студентов технических вузов
22.04.2001**

Задачи только для вузов 3-ей группы

1. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x$.
(2 балла)
2. Доказать, что при $|x| \geq 1$ справедливо соотношение
$$2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sign} x, \text{ где } \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

(2 балла)
3. Пусть $a, b \in \mathbb{R}, ab \neq 0$. Доказать, что система $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a \\ 3x^2y - y^3 = b \end{cases}$ имеет ровно три вещественные пары решений.
(3 балла)
4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{10^{\ln n}}$.
(3 балла)
5. Решить дифференциальное уравнение $x^2 y'' + x y' - y = 0$.
(3 балла)

Задачи для всех вузов

6. Пусть функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $x, y \in [a, b]$ удовлетворяет соотношению $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$, где $M > 0, \alpha > 1$. Доказать, что f — постоянная функция.
(4 балла)
7. Решить уравнение ($a \in \mathbb{R}$): $\sin ax - a \sin x = (a^2 + 1)x$.
(5 баллов)
8. Доказать, что при $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ будет
$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq 2(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})$$

(6 баллов)
9. Дана тройка чисел: $2, \sqrt{2}, 1/\sqrt{2}$. Разрешается любые два из них заменять двумя такими: их суммой, делённой на $\sqrt{2}$, и их разностью, также делённой на $\sqrt{2}$. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, получить тройку чисел $1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$?
(7 баллов)

10. Доказать, что дробная часть десятичного представления числа $(5 + \sqrt{26})^{2001}$ начинается с не менее чем 2001 одинаковых цифр. Какие это цифры?

(8 баллов)

11. Вычислить:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{2001}$$

(10 баллов)

12. Пусть функция f задана и непрерывна на $[-1, 1]$. Найти $\lim_{h \rightarrow +0} \int_{-1}^{+1} \frac{h f(x)}{h^2 + x^2} dx$.

(10 баллов)

13. Найти определитель n -го порядка:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.$$

(10 баллов)

14. Доказать, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ при $n \geq 2$ не может быть целым.

(10 баллов)

15. Пусть функция f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, $c \in (0, b - a)$. Доказать, что найдётся такое $\alpha \in [a + c, b]$, что

$$\int_{\alpha-c}^{\alpha} f(x) dx \leq \frac{c}{b-a-c} \int_a^b f(x) dx.$$

(12 баллов)

Результаты участников, вошедших в командный зачет.

I группа

СПГТУ

Шарков М.Д.	56
Ву Хай Тяу	50
Штернин П.С.	45
Грешнов А.А.	35
Семина М.А.	35
Глазов М.М.	35

СПБГИТМО(ТУ)

Станкевич А.С.	57
Исиченко Ю.Н.	47
Корнеев Г.А.	34
Курасов А.Е.	31
Богумирский О.Б.	24

зачет по пяти участникам

II группа

СПГУ

Плеханов А.А.	27
Зотова А.А.	17
Ланев А.П.	11
Федоренко А.С.	9
Котов Н.В.	8

ВИКУ

Коровин В.Н.	17
Попов П.А.	16
Карпичев Д.А.	15
Рыбальченко С.В.	11
Климченко Д.Ю.	8

ВИТУ

Снежкин В.Е.	14
Сердюков Н.А.	13
Шаплыгин Н.В.	13
Иванов Ю.Г.	5
Толкачев С.В.	4

СПГТИ(ТУ)

Семушин Д.А.	14
Бобров А.С.	11
Червинский А.В.	10
Дубовченко М.Н.	6
Островский Н.Ю.	5

ГУАП

Скорина Б.С.	13
Верендякин Д.А.	10
Горюнов В.А.	7
Астахов С.А.	4
Ваулин С.К.	3

СПГУВК

Егоров Е.А.	13
Гельвер Ф.А.	10
Благинин Е.В.	6
Мельников А.Г.	3
Дехканбаева Л.С.	3

ВМИРЭ

Усачев С.А.	18
Неруин С.В.	5
Александровский В.А.	5
Мотат Е.Ю.	3
Стрельцов А.И.	3

СПГУКиТ

Полушкина С.П.	9
Морохова Е.П.	7
Сидорова И.Ю.	4
Неделяева В.Б.	3
Морохова Е.П.	2

ВКУС

Петрин И.В.	11
Овчинников Д.Н.	2
Барсуков А.В.	1

III группа

СПГИ

Назаров А.Я.	10
Журавлев А.Е.	9
Селиванов А.А.	8
Скрипник К.А.	4
Солодков Е.Л.	2

СЗГТУ

Кувшинов К.В.	17
Щеколова Е.Г.	3

ВМИИ

Григорьев Ю.В.	6
Усманов М.А.	4
Хальзев А.Г.	3
Павлов А.П.	2
Погорелов Э.В.	1
Яфаров В.Е.	1

ГМА

Артасов Г.И.	9
Амбросов В.П.	2
Верозубов А.П.	2
Баскаков А.Б.	1
Рябов А.С.	1

зачет по пяти участникам

СПГУПС

Шихалева Е.В.	5
Сараев В.В.	4
Смирнов С.А.	1

АГА

Григорьева И.С.	1
-----------------	---

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15
Кол-во решивших	2	5	0	1	39	35	18	41	15	4	8	27	7	7