Министерство образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
институт точной механики и оптики
(технический университет)

Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2002г.

Санкт-Петербург
2002

В 2000 - 2002 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным институтом точной механики и оптики (техническим университетом). В 2002 г. в ней участвовали команды из 17 вузов города. Участники были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую- с объемом от 400 до 550 часов, в третью- с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 7 человек. В личном зачете участвовали все заявленные студенты. В командный зачет входили пять участников с лучшими результатами из команды. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две).

Олимпиада проводилась в воскресенье 21.04.2002. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач.

Председателем жюри, как и в прошлые годы был профессор СПбГУ Г.И. Натансон. В оргкомитете олимпиады входили: ректор СПбГИТМО(ТУ), проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асп. Фролов С.В.

Составители: проф. Натансон Г.И., проф. Попов И.Ю.,
доц. Фролов В.М., асп. Фролов С.В., студ. Рябова Е.В.

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 21.04.2002

1. $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+nx_n^2}$. Доказать, что существует предел $\lim x_n$ и найти его.

(2 балла)

2. Найти $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

(2 балла)

3. Найти $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx]$. Здесь $[\alpha]-$целая часть числа α.

(3 балла)

4. Вычислить $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(\sin x+nx)dx,$ где $n-$целое.

(4 балла)

5. Равносторонние треугольники со сторонами 1,3,5,7,… выстроены в ряд так, что их основания расположены на одной прямой и вплотную примыкают друг к другу. Докажите, что вершины треугольников, противоположные основаниям, лежат на некоторой параболе. Какой?

(5 баллов)

6. Решить уравнение $y''e^{-2x}-y'e^{-2x}+16y=0.$

(5 баллов)

7. $a,b,c-$комплексные числа, $|a|=|b|=|c|=r$, $a+b+c\neq 0.$

   Доказать, что $\left|\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right|=r.$

(6 баллов)

8. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^3dx}{e^x-1},$ считая известным, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$

(7 баллов)

9. Доказать, что для дважды непрерывно дифференцируемой $2\pi-$периодической вещественной функции f выполнено неравенство:

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx\right)^2\le\int_0^{2\pi}\left(f''(x)\right)^2dx\cdot\int_0^{2\pi}f^2(x)dx.$$

(8 баллов)

10. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \ldots & 0 & 1/n! \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -n & 1/n! \end{vmatrix}$.

(8 баллов)

11. Что больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\,dxdy$?

(10 баллов)

12. Найти непрерывно дифференцируемое решение функционального уравнения $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy\left(\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{3}\right)$, $x,y\in\mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $f(2)=-2$.

(10 баллов)

Ответы и решения.

1. Так как $0 < x_{n+1} < x_n$, то данная последовательность убывает и ограничена, потому $x_n \to \lambda \geq 0$. Если $\lambda \neq 0$, то $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 1$, с другой стороны, $nx_n^2 \to +\infty$, так что $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{1+nx_n^2} \to 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda = 0$.
2. $$a_n = \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}(-1)} =$$
$$= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1.$$
3. По определению целой части числа $kx - 1 \leq [kx] \leq kx$
$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq \sum_{k=1}^{n}[kx] \leq \sum_{k=1}^{n}kx$$
$$x\frac{(1+n)n}{2} - n \leq \sum_{k=1}^{n}[kx] \leq x\frac{(1+n)n}{2}$$
$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1+n}{n} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}[kx] \leq \frac{x}{2}\cdot\frac{(1+n)}{n}.$$
Так как левая и правая части неравенства сходятся к $\frac{x}{2}$ при $n \to \infty$, то выражение, заключенное между ними стремится к тому же пределу.
<u>Ответ:</u> $\frac{x}{2}$.
4. Сделаем замену переменной. Пусть $t = x - \pi,\ \ dt = dx$, получаем
$$\int_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt + n\pi)dt =$$
$$= (-1)^n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(-\sin t + nt)dt = 0.$$
Последний интеграл равен нулю как определенный интеграл от нечетной функции по отрезку, симметричному относительно начала координат.
5. Введем на плоскости прямоугольную систему координат, выбрав за ось OX прямую, на которой расположены основания равносторонних треугольников, а ось OY проведем через вершину первого треугольника. Вершина n-го треугольника, противолежащая основанию,

расположится в точке $A_n(x_n, y_n)$, где

$x_n = n(n-1) + \frac{1}{2};\ y_n = \pm\left({(2n-1)}\big/{2}\right) \cdot \sqrt{3}$. Исключив n, найдем соотношение между координатами вершин. Оно имеет следующий вид:

$y^2 = 3\left(x - \frac{1}{4}\right)$ (индексы у точек x_n и y_n опускаем). Это уравнение параболы с фокусом в точке $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Расстояние от вершины n-го треугольника до фокуса параболы равно, как нетрудно вычислить, $n^2 - n + 1\ \ (n \in \mathbb{N})$, то есть выражается целым числом.

6. Положим $t = e^x$. Тогда $y'_x = y'_t \cdot e^x,\ \ y''_{xx} = y''_{tt} \cdot e^{2x} + y'_t e^x$, и уравнение преобразуется к виду

   $y''_{tt} + 16y = 0.$

   Его решение:

   $y = C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t$

   $y = C_1 \sin\left(4e^x\right) + C_2 \cos\left(4e^x\right).$

7. Задача допускает следующее обобщение: если взять n комплексных чисел $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{C}$ таких, что $|a_1| = |a_2| = \dots |a_n| = r \neq 0$, и рассмотреть суммы возможных произведений из n этих чисел по s ($T_n^s\ \ (s < n)$), то

   $\left|\frac{T_n^s}{T_n^{n-s}}\right| = r^{2s-n}.\quad (*)$

   <u>Доказательство:</u>

   Пусть $\varphi_j\ \ (j = 1, 2, \dots, n) -$ аргументы чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Тогда $a_j = re^{i\varphi_j}$ и из T_n^s можно вынести множитель r^s, а из $T_n^{n-s} -$ множитель r^{n-s}. После этого в числителе останется величина $e^{i\psi} \cdot \sum e^{-i\theta}$, а в знаменателе – величина $\sum e^{i\theta}$, где $\psi -$ сумма всех аргументов φ_j, а $\theta -$ сумма $(n-s)$ аргументов тех чисел a_j, которые входят в соответствующее слагаемое знаменателя T_n^{n-s}. Поскольку $\sum e^{i\theta}$ и $\sum e^{-i\theta} -$ комплексно сопряженные числа, то $\left|\sum e^{i\theta}\right| = \left|\sum e^{-i\theta}\right|$. Кроме того, $\left|e^{i\psi}\right| = 1$.

   Тем самым, соотношение (*) доказано.

   Исходное утверждение задачи следует из него при n=3 и s=2.

8. $I = \int\limits_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ B \to \infty}} \int\limits_\varepsilon^B x^3 \frac{1}{e^x - 1} dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ B \to \infty}} \int\limits_0^\infty x^3 \frac{1}{1 - e^{-x}} \frac{dx}{e^x}.$

   Разложим $\frac{1}{1 - e^{-x}}$ в ряд

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{B} x^3\sum_{k=0}^{\infty} e^{-kx}\frac{dx}{e^x}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{B}\sum_{k=0}^{\infty} x^3 e^{-(k+1)x}dx.$$

Поскольку ряд сходится равномерно, его можно почленно интегрировать:

$$I=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ B\to\infty}}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{B} x^3 e^{-(k+1)x}dx.$$

Трижды проинтегрировав по частям, находим данный интеграл.

Получаем $I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{k^4}=\frac{\pi}{15}.$

9. При $f(x)=0$ неравенство тривиально выполнено. При $f(x)\neq 0$ функция $y(t)=\int_0^{2\pi}(f''(x))^2dx+2t\int_0^{2\pi}f''(x)f(x)dx+t^2\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=$

$=\int_0^{2\pi}(f''(x)+tf(x))^2dt\geq 0$ является квадратным трехчленом с неположительным дискриминантом:

$$\left(\int_0^{2\pi}f''(x)f(x)dx\right)^2\leq\int_0^{2\pi}\left(f''(x)\right)^2dx\cdot\int_0^{2\pi}f^2(x)dx.$$

Остается применить формулы интегрирования по частям $\int_0^{2\pi}f''(x)f(x)dx=-\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx$, внеинтегральный член исчезает ввиду периодичности f.

Второе решение. Разложим функцию f в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{ikx},\quad f'(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}ikC_k e^{ikx},\quad f''(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(-k^2C_k\right)e^{ikx}.$$

Так как f – дважды непрерывно дифференцируемая функция, все эти ряды сходятся абсолютно. По равенству Парсеваля

$\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2$. Тогда, используя его и неравенство Коши-Буняковского получаем:

$$\left(\int_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx\right)^2=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}k^2|C_k|^2\right)^2\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(k^2|C_k|\right)^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}|C_k|^2=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(f''(x)\right)^2dx\int_0^{2\pi}f^2(x)dx.$$

10.
$$\lim_{n\to\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}I_n.$$

В I_n прибавляем к первой строке все остальные строки, при этом i-тую строку умножаем на $\frac{1}{(i-1)!}\cdot x^{i-1}$ $(i=2,3,\dots,n+1)$. В результате

$$I_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & R_n(x) \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix},\ \text{где}\ R_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Откуда $I_n = R_n(x)\cdot(-1)^{n+1+1}\cdot(-1)^n\cdot n!$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}I_n = \lim\limits_{n\to\infty}R_n(x) = e^x.$

11. Сделаем замену переменных во втором интеграле: $u = xy$,

тогда интеграл будет равен $-\int_0^1\left(\int_1^u \frac{u^u}{x}dx\right)du = -\int_0^1 u^u\left(\ln x\Big|_1^u\right)du = -\int_0^1 u^u \ln u\,du.$

Таким образом, $\int_0^1 u^u(1+\ln u)du = u^u\Big|_0^1 = 0,$ и следовательно, оба интеграла равны.

12. При $x=0$ и $y=0$ имеем: $f(0) = f(0) + f(0),$ то есть $f(0)=0.$

Перепишем уравнение в виде:

$$f(x+y) - f(x) = f(y) - f(0) + xy\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right).$$

Делим его на y: $\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)-f(0)}{y} + x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right).$

Переходим к пределу в равенстве при $y\to 0$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}+\lim_{y\to 0}x\left(\frac{x^2}{3}+\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{3}\right).$$

Отсюда $f'(x)=f'(0)+\frac{x^3}{3}.$

Обозначим $f'(0)=k,$ тогда $f'(x)=k+\frac{x^3}{3}$, следовательно,

$f(x)=\int\left(k+\frac{x^3}{3}\right)dx=kx+\frac{x^4}{12}+C.$ Так как $f(0)=0,$ то C=0.

Найдем k из условия $f(2)=-2:$ $2k+\frac{2^4}{12}=-2$ или $k=-\frac{5}{3}.$

Следовательно, если решение существует, то оно должно иметь вид $f(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{x^4}{12}.$ Подставляя в уравнение, убеждаемся, что это действительно решение.

Результаты олимпиады 2002 года.

В олимпиаде приняли участие команды следующих вузов.

- Санкт-Петербургский государственный институт точной механики и оптики (технический университет) – ИТМО (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технический университет – СПГТУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет– СПГУ(эк),
- Санкт-Петербургский Военный инженерно-космический университет им. А.Ф.Можайского – ВИКУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения – СПГУКиТ,
- Военный инженерно-технический университет – ВИТУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет – СПГТИ(ТУ),
- Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения – СПГУАП,
- Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций – СПГУВК,
- Военно-морской институт радиоэлектроники - ВМИРЭ,
- Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет – СПГАСУ,
- Пушкинский филиал Военного инженерно-космического университета-фил. ВИКУ
- Северо-западный заочный государственный технический университет – СЗГТУ,
- Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет) – СПГГИ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения – СПГУПС (2 команды),
- Военно-морской инженерный институт - ВМИИ
- Государственная морская академия им. адм. С.О.Макарова – ГМА.

Командное первенство

I группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ИТМО	176/ 118	1
СПГТУ	99/ 73	2

II группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
СПГУ(эк)	139	1
ВИКУ	81/ 39	2
СПГУКиТ	75	3
ВИТУ	64/ 31	4
СПГТИ(ТУ)	43	5
СПГУАП	42	6
СПГУВК	27	7
ВМИРЭ	24	8
СПГАСУ	12	9

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
Фил.ВИКУ	64	1
СЗГТУ	33	2
СПГГИ	26/ 0	3
СПГУПС	10/ 1	4
ВМИИ	9	5
ГМА	6	6

Личное первенство

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Курасов А.Е.	ИТМО	47	1	1 ст.
Исиченко Ю.Н..	ИТМО	36	2	2 ст.
Канжелев С.Ю.	ИТМО-2	35	3	2 ст.
Оршанский С.А.	ИТМО	34	4	3 ст.
Станкевич А.С.	ИТМО	33	5	3 ст.
Жидков Е.И.	СПГТУ	31	6	3 ст.

II группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Плеханов А.А.	СПГУ(эк)	33	1	1 ст.
Юдаева М.С.	СПГУ(эк)	32	2	1 ст.
Зотова А.А.	СПГУ(эк)	28	3	2 ст.
Федоренко А.С.	СПГУ(эк)	28	4	2 ст.
Попов П.А.	ВИКУ	27	5	2 ст.
Габдулхаков М.З.	ВИТУ	22	6	3 ст.
Платонов И.В.	ВИКУ	20	7	3 ст.

III группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Ларченко С.П.	Фил. ВИКУ	14	1	1 ст.
Шемис А.Л.	Фил. ВИКУ	14	2	1 ст.
Смирнов М.С..	Фил. ВИКУ	13	3-5	2 ст.
Барковский Н.	СЗГТУ	13	3-5	2 ст.
Ионова М.Ю.	СПГТИ(ТУ)	13	3-5	2 ст.
Шудра И.Д.	Фил. ВИКУ	12	6	3 ст.
Янов С.В.	Фил. ВИКУ	11	7	3 ст.

Результаты участников, вошедших в командный зачет.

I группа

СПбГИТМО(ТУ)

Курасов А.Е..	47
Исиченко Ю.Н.	36
Оршанский С.А.	34
Станкевич А.С.	33
Медвинский М.Д.	26

СПГТУ

Жидков Е.И.	31
Прокатор И.С.	22
Талалов О.В.	18
Кулиев А.Р.	15
Лебедев Р.А.	13

II группа

СПГУ

Плеханов А.А.	33
Юдаева М.С.	32
Зотова А.А.	28
Федоренко А.С.	28
Котов Н.В.	18

ВИКУ

Попов П.А.	27
Платонов И.В.	20
Климченко Д.Ю.	13
Карпичев Д.А.	12
Морозов В.Н..	9

СПГУКиТ

Полушкина С.П.	19
Красотин А.М.	17
Стрельцов А.В..	16
Гурьев В.С.	13
Петров А.А..	10

ВИТУ

Габдулхаков М.З.	22
Сердюков Н.А.	15
Малышев А.А.	13
Иванов Ю.Г.	7
Паращенко Р.Н.	7

СПГТИ(ТУ)

Спорягин К.В.	12
Червинский А.В.	11
Бороздин П.А.	9
Гарбарь С.В.	8
Нешин К.Г.	3

СПбГУАП

Горюнов В.А.	11
Эфроимский Б.А.	10
Карпов А.Г.	9
Троянов А.И.	8
Шоколов В.А.	4

СПГУВК

Андрухович Т.А.	8
Гельвер Ф.А.	6
Меркулов А.Ф.	6
Сумароков Ю.А.	4
Вальков В.В.	3

ВМИРЭ

Блынский А.А.	11
Евдокимов А.И.	5
Усачев С.А.	5
Грянко А.М.	2
Стрельцов Ал-др Г.	1

СПбГАСУ

Иванов А.А.	5
Кузнецова А.Н.	4
Соловьева И.В.	2
Запорожец Н.В.	1

III группа

Филиал ВИКУ

Ларченко С.П.	14
Шемис А.Л.	14
Смирнов М.С.	13
Шудра И.Д.	12
Янов С.В..	11

СЗГТУ

Барковский Н.	13
Балашов Е.Л.	8
Никитин А.	7
Карпова А.	3
Самойлов Р.	2

СПГГИ(ТУ)

Ионова М.Ю..	13
Коваленко Е.А.	5
Ионова Е.Ю.	3
Зацепин М.А.	3
Корельский Д.С.	2

СПГУПС

Сараев В.	5
Середа Е.	3
Шкредов К.	1
Яковлева Е.	1

ВМИИ

Григорьев Ю.В.	6
Ахлестин В.В.	1
Балабанов А.Л.	1
Карманов Е.Ю..	1

ГМА

Суховерша Д.	3
Прохоров Д.	3

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	43	47	32	26	62	9	21	1	3	30	0	17