Министерство образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2004г.

Санкт-Петербург
2004

В 2000 - 2004 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО). В 2004 г. в ней участвовали команды из 19 вузов города. Участники были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую - с объемом от 400 до 550 часов, в третью - с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 7 человек. В личном зачете участвовали все заявленные студенты. В командный зачет входили пять участников с лучшими результатами из команды. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две).

Олимпиада проводилась в воскресенье 11.04.2004. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач.

Председателем жюри был профессор СПбГУ Н.А. Широков. В оргкомитет олимпиады входили: ректор СПбГУ ИТМО, проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Фролов С.В, асс. Сытенко Н.В.

Составители: проф., д.ф.-м.н. Н.А. Широков, проф., д.ф.-м.н. Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Фролов С.В, асс. Сытенко Н.В., студ. Гортинская Л.В., студ. Тесовская Е.С.

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга
среди студентов технических вузов
11.04.2004

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}}$. (2 балла)

2. Нарисовать на комплексной плоскости множество точек, для которых выполнено неравенство $\left|z^2-3z\right|+1<\left|z\right|+\left|z-3\right|$.(3 балла)

3. Найти асимптоты обратной функции f^{-1}, если задана сама функция $f(x)=4x-\operatorname{arctg} x$. (4 балла)

4. Функции $fg,\ gh,\ fh$ бесконечно дифференцируемы. Следует ли отсюда непрерывность хотя бы одной из функций f,g,h хотя бы в одной точке? (5 баллов).

5. В выпуклом n-угольнике наудачу выбираются 2 диагонали. Какова вероятность того, что они пересекаются? (Точкой пересечения считается общая точка двух несовпадающих диагоналей, лежащая внутри многоугольника.) (6 баллов)

6. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(e^x+1)\left(x^2+1\right)}$.(6 баллов)

7. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$. (6 баллов)

8. В последовательности $\{a_n\}$ $a_1=3,\ a_n=a_{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}$, $n=2,3...$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (7 баллов)

9. Существует ли непрерывная на $\left(1,+\infty\right)$ функция $f(t)$ такая, что $\int\limits_x^{x^2} f(t)dt=1$ для любого $x>1$. (8 баллов)

10. У симметричной матрицы порядка n все элементы положительны. Докажите, что у нее найдется положительное собственное число. (8 баллов).

11. Функция $f(x)$ такова, что $\int\limits_0^{\infty}\left(a\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=1$. Найдите максимально возможное значение $f(0)$ в зависимости от a *(a>0).* (10 баллов).

12. Пусть $f(x)$ - многочлен степени n и $\Phi(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{2}+...+\frac{f^{(n)}(x)}{2^n}$. Доказать, что, если все корни $\Phi(x)$ вещественные, то все корни $f(x)$ тоже вещественные. (10 баллов).

Ответы и решения.

1. Используем правило Лопиталя:

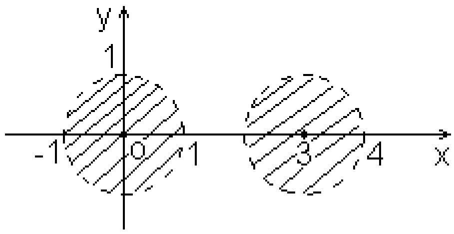
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\int\limits_0^x e^{t^2}dt\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}=2\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$$

2. $|z|\cdot|z-3|-|z|-|z-3|+1<0$,

$|z|\cdot\left(|z-3|-1\right)-\left(|z-3|-1\right)<0,$

$\left(|z-3|-1\right)\left(|z|-1\right)<0.$

Ответ: открытые круги радиуса 1 с центрами в точках (0,0) и (3,0) (см. рис.)



3. Асимптоты функции $f(x)$: $y=kx+b$,

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=4,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(-\operatorname{arctg}x)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & x\to+\infty\\ \frac{\pi}{2} & x\to-\infty\end{cases}$$

При $x\to+\infty$ $y=4x-\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{y+\frac{\pi}{2}}{4}$, $\qquad y\to+\infty$,

при $x\to-\infty$ $y=4x+\frac{\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{y-\frac{\pi}{2}}{4}$, $\qquad y\to-\infty$.

Асимптоты обратной функции $f^{-1}(x)$ (прямые, симметричные относительно прямой $y=x$ к асимптотам прямой функции):

$y=\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}$ при $x\to+\infty$, $\qquad y=\frac{x}{4}-\frac{\pi}{8}$ при $x\to-\infty$.

4. Пусть A,B,C - три всюду плотных множества, дизъюнктивно покрывающих всю прямую (например, рациональные числа, их сдвиги на $\sqrt{2}$

и все остальные), тогда произведение характеристических функций любых двух из этих множеств есть 0 на всей прямой, но функции всюду разрывны.

5. Пусть событие A означает, что выбранные диагонали пересекаются. Тогда $P(A)=\frac{M}{N}$, где N - число всех исходов данного опыта, а M - число тех из них, которые благоприятствуют событию A. Очевидно, что $N=\frac{\left(C_n^2-n\right)\left(C_n^2-n-1\right)}{2}$, так как выбрать диагональ значит выбрать ее концы, то есть выбрать две любые вершины данного n-угольника, кроме соседних, а выбрать другую – значит, выбрать любые две вершины, кроме соседних и тех, которые определяют первую диагональ; $M=C_n^4$, так как любые 4 вершины взаимно однозначно определяют пару пересекающихся диагоналей. Значит, $P(A)=\frac{2C_n^4}{\left(C_n^2-n\right)\left(C_n^2-n-1\right)}$.

6. $$I=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\left(e^x+1\right)\left(x^2+1\right)}\overset{x=-t}{=}\int_{-1}^{1}\frac{e^t dt}{\left(e^t+1\right)\left(t^2+1\right)}=\int_{-1}^{1}\frac{e^t+1-1}{\left(e^t+1\right)\left(t^2+1\right)}dt=$$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(t^2+1\right)}-\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(e^t+1\right)\left(t^2+1\right)}=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{\left(t^2+1\right)}-I,$$

$$2I=\int_{-1}^{1}\frac{dt}{t^2+1}=\frac{\pi}{2},\quad I=\frac{\pi}{4}.$$

7. Пусть $\frac{1}{1+x^4\cos^2 x}=f(x)$. Тогда при $\pi n\le x\le \pi(n+1)$

$$\frac{1}{1+\pi^4(n+1)^4\cos^2 x}\le f(x)\le\frac{1}{1+\pi^4 n^4\cos^2 x},$$

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+\pi^4(n+1)^4\cos^2 x}\le\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}f(x)dx\le\int_{\pi n}^{\pi(n+1)}\frac{dx}{1+\pi^4 n^4\cos^2 x}.$$ Но

$$\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+\pi^4(n+1)^4\cos^2 x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2 x+1+\pi^4(n+1)^4}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{d(\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}^2 x+1+\pi^4(n+1)^4}=\frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^4(n+1)^4}}$$

Суммируя по n, находим $\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^4(n+1)^4}}\le\int_{0}^{\infty}f(x)dx\le\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\pi^4 n^4}}$.

Следовательно, интеграл сходится.

8. $a_n - a_{n-1} = -\dfrac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}$.

Следовательно,

$$a_n - a_1 = -\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!} - \frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot(n-1)!} - \ldots - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2!}$$

$$a_n = 3 - \frac{2-1}{1\cdot 2\cdot 2!} - \frac{3-2}{2\cdot 3\cdot 3!} - \ldots - \frac{n-(n-1)}{(n-1)\cdot n\cdot n!} =$$

$$= 3 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2\cdot 2!} - \frac{1}{2\cdot 3!} + \frac{1}{3\cdot 3!} - \ldots - \frac{1}{(n-1)\cdot n!} + \frac{1}{n\cdot n!} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!} + \frac{3-1}{2\cdot 3!} + \frac{4-1}{3\cdot 4!} + \ldots + \frac{n-1}{(n-1)\cdot n!} + \frac{1}{n\cdot n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n\cdot n!}.$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

9. Продифференцировав, получим $2xf(x^2) = f(x)$, то есть $2x^2 f(x^2) = xf(x)$. Обозначим $F(x) = xf(x)$, тогда $2F(x^2) = F(x)$. Сделаем замену $x = e^{\ln y}$, $2F(e^{2\ln y}) = F(e^{\ln y})$. Обозначив $t = \ln y$, $G(t) = F(e^{\ln y})$, получим $2G(2t) = G(t)$, $2tG(2t) = tG(t)$. Пусть $H(t) = tG(t)$. Тогда $H(2t) = H(t)$ (*).

Например, $H \equiv const = c$ дает $G(t) = \dfrac{c}{t}$, $F(x) = \dfrac{c}{\ln x}$, откуда $f(x) = \dfrac{c}{x\ln x}$.

Подставив в условие (*), получим

$$\int_x^{x^2} \frac{c}{t\ln t}dt = c\cdot \ln\ln t \,\Big|_x^{x^2} = 1,$$

то есть $c = \dfrac{1}{\ln 2}$. Итак, $f(x) = \dfrac{1}{\ln 2\cdot x\ln x}$ - искомый пример.

10. Все собственные числа матрицы вещественны, так как она симметрична. Сумма их – след матрицы – положительна, поскольку след матрицы оператора инвариантен относительно замены базиса и, значит, совпадает с суммой диагональных элементов исходной матрицы, которая положительна. Поэтому хотя бы одно из собственных значений положительно.

11. Если $a > 0$, то

$$1 = \int_0^\infty \Big(a\big(f(x)\big)^2 + \big(f'(x)\big)^2 \Big)dx \ge$$

$$\int_0^\infty 2\sqrt{a}\,|f(x)\cdot f'(x)|dx \ge \left|\int_0^\infty 2\sqrt{a}\,f(x)\cdot f'(x)dx\right| = \sqrt{a}\,\left|f(\infty)^2 - f(0)^2\right| = \sqrt{a}\,f(0)^2$$

(иначе нет сходимости интеграла), поэтому $f(0) \le \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$, а это значение достигается для функции, для которой $\sqrt{a} = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \right|$, то есть для $f(x) = \frac{\exp(-x\sqrt{a})}{\sqrt[4]{a}}$.

12. $\Phi(x)$ - многочлен степени *n*, следовательно, он имеет *n* корней (с учетом кратностей), лежащих на некотором промежутке $[a,b]$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = e^{-2x} \cdot \Phi(x)$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} \cdot \Phi(x) = 0$, то по теореме Ролля производная $\varphi'(x)$ имеет не менее *n* корней на промежутке $[a,+\infty)$.

$$\varphi'(x) = e^{-2x}(-2\Phi(x) + \Phi'(x)) =$$

$$= e^{-2x}\left(-2f(x) - f'(x) + \ldots - \frac{f^{(n)}(x)}{2^{n-1}} + f'(x) + \frac{f''(x)}{2} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{2^{n-1}}\right) = e^{-2x}\left(-2f(x)\right).$$

Следовательно, $f(x)$ имеет *n* вещественных корней.

Результаты олимпиады 2004 года.

В олимпиаде приняли участие команды следующих вузов:

- Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики – ИТМО (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет – СПГПУ,
- Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена – РГПУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет– СПГУ(эк),
- Военно-космическая академия им. А.Ф.Можайского – ВКА (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения – СПГУКиТ,
- Военный инженерно-технический университет – ВИТУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) – СПГТИ(ТУ),
- Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций – СПГУВК,
- Военно-морской институт радиоэлектроники им. А.С.Попова – ВМИРЭ,
- Филиал Военно-космической академии им. А.Ф.Можайского – фил. ВКА,
- Северо-западный заочный государственный технический университет – СЗГТУ,
- Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет) – СПГГИ,
- Военно-морской инженерный институт – ВМИИ,
- Государственная морская академия им. адм. С.О.Макарова – ГМА,
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича – СПГУТ,
- Государственный университет аэрокосмического приборостроения – ГУАП,
- Государственный архитектурно-строительный университет – ГАСУ,
- Петербургский государственный университет путей сообщения – ПГУПС.

Командное первенство

Если от вуза участвовало две команды, то результат второй указан через дробную черту.

<u>Абсолютный зачет</u>

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ИТМО	119	1
СПГГИ	91	2
ВКА	72,5	3

<u>I группа</u>

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ИТМО	119 / 94	1
СПГПУ	56	2
РГПУ	49,5	3

II группа

Вуз	Кол-во баллов	место в группе
ВКА	72,5 / 33,5	1
Фил. ВКА	60,5	2
СПГТИ (ТУ)	49,5	3
СПГУ (эк)	46	4
ВИТУ	44,5 /19,5	5
СПГУКиТ	25,5	6
СПГУВК	23	7
ГУАП	17	8
СПГУТ	13	9
ГАСУ	11	10
ВМИРЭ	4	11

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
СПГГИ	91	1
ВМИИ	24,5	2
ПГУПС	16	3
СЗГТУ	11	4
ГМА	10	5

Личное первенство

Абсолютный зачет

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сатюков Р.В.	ИТМО	56	1	1 ст.
Павлов Д.С.	ИТМО	31	2	2 ст.
Дау Ань Тхань	СПГГИ (ТУ)	25	3	2 ст.
Ходаковский Е.С.	СПГГИ (ТУ)	21	4 – 6	3 ст.
Хващенко Е.К.	ВКА	21	4 – 6	3 ст.
Лебедев Д.С.	СПГПУ	21	4 – 6	3 ст.

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сатюков Р.В.	ИТМО	56	1	1 ст.
Павлов Д.С.	ИТМО	31	2	2 ст.
Лебедев Д.С.	СПГПУ	21	3	2 ст.
Лоторейчик В.Ю.	ИТМО	19	4 – 7	2 ст.
Нгуен Ван Тханг	СПГПУ	19	4 – 7	2 ст.
Киракозов А.	ИТМО	19	4 – 7	2 ст.
Ковалев А.С.	ИТМО	19	4 – 7	2 ст.
Холодилов А.	РГПУ	17,5	8	3 ст.
Пименов С.Ю.	ИТМО	17	9	3 ст.

II группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Хващенко Е.К.	ВКА	21	1	1 ст.
Назаренко С.Н.	ВКА	17	2	2 ст.
Петтай П.П.	СПГУ(эк)	15	3	2 ст.
Расторгуев Ан.С.	Фил. ВКА	14	4	3 ст.
Однолетков М.А.	СПГТИ(ТУ)	13,5	5	3 ст.
Янов С.В.	Фил. ВКА	13	6 – 8	3 ст.
Смирнов М.С.	Фил. ВКА	13	6 – 8	3 ст.
Сомов А.В.	ВКА	13	6 – 8	3 ст.

III группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Дау Ань Тхань	СПГГИ(ТУ)	25	1	1 ст.
Ходаковский Е.С.	СПГГИ(ТУ)	21	2	2 ст.
Зацепин М.А.	СПГГИ(ТУ)	16	3	2 ст.
Нгуен Тху Хьен	СПГГИ(ТУ)	15	4	2 ст.
Ионова М.Ю.	СПГГИ(ТУ)	14	5	2 ст.
Снегуров А.А.	СЗГТУ	9,5	6	3 ст.
Усманов М.А.	ВМИИ	8,5	7	3 ст.

Результаты участников, вошедших в командный зачет.

I группа

ИТМО *)

Сатюков Р.В.	56
Ковалев А.С.	19
Киракозов А.	19
Зворыгин Д.Е.	13
Камышан А.И.	12
Царев Ф.Н.	12

СПГПУ

Лебедев Д.С.	21
Нгуен Ван Тханг	19
Скороботов С.С.	13
Кузькин В.А.	2,5
Сотник Д.Е.	0,5

РГПУ

Холодилов А.	17,5
Смирнов А.	9
Кобрин Р.	8
Меркулов А.	7,5
Панфилова Ю.	7,5

II группа

ВКА

Хващенко Е.К.	21
Назаренко С.Н.	17
Сомов А.В.	13
Платонов И.В.	12,5
Привалов И.В.	9

Фил. ВКА

Расторгуев Ан.С.	14
Янов С.В.	13
Смирнов М.С.	13
Ваганов А.А.	12,5
Расторгуев Ал.С.	8

СПГТИ(ТУ)

Однолетков М.А.	13,5
Спорягин К.В.	11
Рыбушкина Е.М.	10
Хайдаров А.Г.	8
Доманова О.С.	7

СПГУ (эк)

Петтай П.П.	15
Глухова О.А.	10
Акамелков Р.А.	7
Кочетов А.А.	7
Юдаева М.С.	7

ВИТУ

Набоко Г.Б.	12
Тураев А.Г.	12
Габдулхаков М.З.	11
Александров П.А.	5,5
Кудрицкий И.Б.	4

СПГУКиТ

Фединчишин О.Н.	10
Борисов В.В.	6
Китанов М.Ю.	4
Платонов П.Ю.	3,5
Моисеева Е.Н.	2

СПГУВК *)

Гельвер Ф.А.	10
Зайнуллин Р.Р.	6
Бадюк М.А.	3
Корнопелева И.К.	2
Соколов С.С.	2
Хан И.А.	2

ГУАП

Рыжков А.С.	12
Терехина О.А.	3
Дрягин А.М.	2

ГАСУ

Борисов И.	5
Аль Даббаг В.	3
Свенцицкий Э.	2,5
Беркалиев Р.	0,5

СПГУТ

Салихова Д.Р.	5
Хахилев А.Л.	4
Антохина О.М.	2,5
Ивичев А.В.	1
Готовец В.А.	0,5

ВМИРЭ

Потапов А.В.	4

<u>III группа</u>

СПГГИ (ТУ)

Дау Ань Тхань	25
Ходаковский Е.С.	21
Зацепин М.А.	16
Нгуен Тху Хьен	15
Ионова М.Ю.	14

ВМИИ

Усманов М.А.	8,5
Васильев Н.В.	8
Щуров М.Н.	4
Букин М.Б.	2
Черенков Д.А.	2

ПГУПС

Кударов Р.	5
Ван Лян	4
Дубровинская Е.	3
Горбачев А.	2
Коваленко А.	2

СЗГТУ

Снегуров А.А.	9,5
Фураев В.В.	1,5

ГМА

Мошкин С.Л.	7
Фадеев В.В.	3

*) В зачет команды вошли пять участников.

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	47,8	39,2	41,3	10	18,2	42,2	6	24,3	4,5	1,3	1,4	1,5

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2003 года

1. Решить краевую задачу

$$xy''+2y'-xy=0,\; y(+0)=\lim_{x\to+0}y(x) \text{ - ограничено, } y(\ln 2)=\frac{3}{\ln 16}.$$

(2 балла)

2. Если функции $f(x),\ g(x),\ h(x)$ непрерывны на [a, b] и дифференцируемы в (a, b), то существует точка $c\in(a,b)$ такая, что $\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix}=0$

(2 балла)

3. Доказать, что многочлены $(z+1)^{2003}+1$ и $z^{20}-2002\cdot z^{10}-2003$ не имеют общих комплексных корней.

(4 балла)

4. Пусть $P(x)$ - многочлен степени $n>1$, $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ - его различные корни. Доказать, что $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+...+\frac{1}{P'(x_n)}=0$.

(6 баллов)

5. На черных клетках шахматной доски написаны $ch\,x$, а на белых - $sh\,x$. За один ход можно все функции, стоящие на какой-то горизонтали или какой-то вертикали заменить на их производные. Можно ли не более, чем за 2003 хода получить расстановку, при которой по краям доски написаны $ch\,x$, а в остальных клетках $sh\,x$?

(6 баллов)

6. Последовательность x_n такая, что

$$x_1=\frac{1}{2},\; x_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}},\; n=1,2,\ldots.$$

Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty}x_n<1{,}025$.

(6 баллов)

7. Пусть A – квадратная матрица с $\det A\neq 0$ (т.е. невырожденная), в каждой строке которой стоит только одно число, отличное от 0 и равное +1 или –1.

Доказать, что при некотором натуральном m справедливо равенство: $A^m = A^T$, где A^T - транспонированная матрица A.

(8 баллов)

8. Составьте уравнение поверхности, получаемой вращением кривой $x^3 + y^3 = 3xy;\ z = 0$ вокруг прямой $x = y = z$.

(8 баллов)

9. В пространстве R^4 заданы четырехмерный куб и трехмерная гиперплоскость, не параллельная ни одному из ребер куба. Доказать, что она содержит не более 6 вершин куба.

(9 баллов)

10. Найдите $y^{(n)}(0)$, если $y(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.

(10 баллов)

11. Даны две матрицы A и B размерами 3×2 и 2×3 соответственно, причем известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$ Найти BA.

(10 баллов)

12. Найти $\sum_{n=1}^{\infty} arcctg\, 2u_n^2$, где

$u_1 = 1,\quad u_2 = 1,\quad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$.

(10 баллов)

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2002 года

1. $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+nx_n^2}$. Доказать, что существует предел $\lim x_n$ и найти его.

(2 балла)

2. Найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}$.

(2 балла)

3. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]$. Здесь $[\alpha]-$целая часть числа α.

(3 балла)

4. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \sin(\sin x + nx)dx,$ где $n-$целое.

(4 балла)

5. Равносторонние треугольники со сторонами 1,3,5,7,… выстроены в ряд так, что их основания расположены на одной прямой и вплотную примыкают друг к другу. Докажите, что вершины треугольников, противоположные основаниям, лежат на некоторой параболе. Какой?

(5 баллов)

6. Решить уравнение $y''e^{-2x} - y'e^{-2x} + 16y = 0.$

(5 баллов)

7. $a,b,c-$комплексные числа, $|a|=|b|=|c|=r$, $a+b+c\neq 0.$ Доказать, что
$$\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right| = r.$$

(6 баллов)

8. Вычислить $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x^3dx}{e^x-1},$ считая известным, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^4} = \dfrac{\pi^4}{90}.$

(7 баллов)

9. Доказать, что для дважды непрерывно дифференцируемой $2\pi-$периодической вещественной функции f выполнено неравенство:
$$\left(\int\limits_0^{2\pi}\left(f'(x)\right)^2dx\right)^2 \le \int\limits_0^{2\pi}\left(f''(x)\right)^2dx\cdot\int\limits_0^{2\pi} f^2(x)dx.$$

(8 баллов)

10. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}$.

(8 баллов)

11. Что больше: $\int\limits_0^1 x^x dx$ или $\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy)^{xy}\, dxdy$?

(10 баллов)

12. Найти непрерывно дифференцируемое решение функционального уравнения $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy\left(\frac{x^2}{3} + \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{3}\right)$, $x, y \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $f(2) = -2$.

(10 баллов)