Министерство образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2005г.

Санкт-Петербург
2005

В 2000 - 2005 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО). В 2005 г. в ней участвовали команды из 21 вуза города. Участники были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую - с объемом от 400 до 550 часов, в третью - с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 7 человек. В личном зачете участвовали все заявленные студенты. В командный зачет входили пять участников с лучшими результатами из команды. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две).

Олимпиада проводилась в воскресенье 3 апреля 2005 года. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач.

Председателем жюри был профессор СПбГУ Н.А. Широков. В оргкомитет олимпиады входили: ректор СПбГУ ИТМО, проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Фролов С.В, асс. Сытенко Н.В.

Составители: проф., д.ф.-м.н. Н.А. Широков, проф., д.ф.-м.н. Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Фролов С.В, асс. Сытенко Н.В., асс. Гортинская Л.В., асс. Тесовская Е.С.

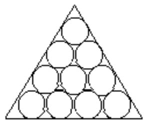
Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 03.05.2005

1. Непрерывная на оси функция f принимает только иррациональные значения. $f(\sqrt{2})=\sqrt{e}$. Найти $f(2)$. (2 балла)

2. Пусть $x_1,...x_5$ - корни уравнения $x^5-x-1=0$. Найти $x_1^6+x_2^6+...+x_5^6$. (3 балла)

3. Пусть A - $(n\times n)$-матрица, все элементы которой являются четными числами. Могут ли среди ее собственных чисел быть нечетные? (3 балла)

4. В равносторонний треугольник вписаны окружности так, как показано на рисунке. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{S}$, где S - площадь треугольника, а S_n - сумма площадей всех n кругов. (4 балла)



5. Найти все дифференцируемые функции $\varphi(x)$, удовлетворяющие уравнению $\int\limits_0^1\varphi(ax)da=n\varphi(x)$. (4 балла)

6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx$, $n\in\mathbb{N}$. (5 баллов)

7. Доказать неравенство: $\ln\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}\geq\frac{x+y}{4xy}-\frac{1}{x+y}$ при $x>1, y>1$. (5 баллов)

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если $a_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+1)^{2m}}$. (6 баллов)

9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{D_n}{n!\ln n}$, где $D_n=\begin{vmatrix}3 & 1 & ... & 1 & 1\\ 1 & 4 & ... & 1 & 1\\ ... & ... & ... & ... & ...\\ 1 & 1 & ... & n & 1\\ 1 & 1 & ... & 1 & n+1\end{vmatrix}$. (7 баллов)

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy''-y'+4xy^3=0$. (7 баллов)

11. Найти функцию $f(x)$, непрерывную всюду на вещественной оси за исключением точек $x=0$ и $x=1$ и удовлетворяющую уравнению $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+2f\left(x+1\right)=x+1$. (9 баллов)

12. Пусть квадратные матрицы A и B третьего порядка таковы, что $A=A^T, B=B^T$, $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0$, $\det A>0$, $b_{11}>0$, $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}>0$, $\det B>0$. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}\cdot b_{ji}>0$. (10 баллов)

Ответы и решения.

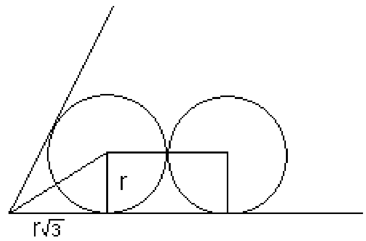
1. Функция постоянна. Если предположить, что она принимает два различных иррациональных значения, то в силу непрерывности она принимает и все промежуточные значения (теорема Больцано-Коши). Но между любыми иррациональными числами есть рациональные. Получаем противоречие. Ответ: $f(2)=\sqrt{e}$

2. Заметим, что $x^6=x^2+x$, следовательно,

$$\sum x_i^6=\left(\sum x_i\right)^2-2\sum x_i x_j+\sum x_i=0+0-0=0.$$

3. Рассмотрим характеристический многочлен $\lambda^n-P_{n-1}(\lambda)=0$. Так как правая часть четна, и $P_{n-1}(\lambda)$ тоже четно (так как слагаемые имеют хотя бы один четный множитель вида a_{ij}), то λ^n - четное. Следовательно, ни одно собственное число не может быть нечетным.

4. Пусть m - число окружностей в нижнем ряду. Тогда всего окружностей $n=\dfrac{1+m}{2}\cdot m=\dfrac{m\left(m+1\right)}{2}$. Пусть сторона треугольника a, а радиус окружности r (см. рисунок). Тогда $a=2r\left(m-2\right)+2r+2r\sqrt{3}$, следовательно, $r=\dfrac{a}{2m-2+2\sqrt{3}}$. Тогда $S_n=\dfrac{\pi a^2\cdot m(m+1)}{(2m-2+2\sqrt{3})^2\cdot 2}$ и



$S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S}=\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\pi m(m+1)\cdot 4}{2\sqrt{3}(2m-2+2\sqrt{3})^2}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

5. Сделаем замену переменной $t=ax$, тогда $dt=xda$ и $\int\limits_0^1\varphi(ax)da=\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x\varphi(t)dt$. Уравнение приводится к виду $\int\limits_0^x\varphi(t)dt=nx\cdot\varphi(x)$. Дифференцируя, получим $\varphi(x)=n\varphi(x)+nx\varphi'(x)$, откуда $\varphi(x)=C\exp\left(\dfrac{1-n}{2n}x^2\right)$.

6. Будем считать интеграл по частям: $u=\left(\sin x-\cos x\right)^{2n}$ и $dv=\dfrac{\sin x-\cos x}{\left(\sin x+\cos x\right)^{2n+1}}dx$. Тогда $du=2n\left(\sin x-\cos x\right)^{2n-1}\left(\cos x+\sin x\right)dx$, а $v=\dfrac{1}{2n\left(\sin x+\cos x\right)^{2n}}$. Обозначим искомый интеграл за I_n и получим

$$I_n=\left.\frac{\left(\sin x-\cos x\right)^{2n}}{2n\left(\sin x+\cos x\right)^{2n}}\right|_0^{\pi/4}-1\cdot\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n-1}dx \quad \text{или}$$

$$I_n=-\frac{1}{2n}-I_{n-1}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2\left(n-1\right)}-\frac{1}{2\left(n-2\right)}+I_{n-2}=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2\left(n-1\right)}-...+(-1)^n\frac{1}{2}\ln 2$$

7. $\ln\dfrac{x+y}{2}-\dfrac{1}{2}\left(\ln x+\ln y\right)\geq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+y}\Leftrightarrow$

$2\ln\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2}{x+y}\geq\left(\ln x+\ln y\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\Leftrightarrow$

$2\ln\dfrac{x+y}{2}+\dfrac{1}{\frac{x+y}{2}}\geq\dfrac{1}{2}\left(2\ln x+\dfrac{1}{x}+2\ln y+\dfrac{1}{y}\right)$. Для доказательства рассмотрим функцию $y=2\ln t+\dfrac{1}{t}$, $t>1$. Найдем ее вторую производную:

$y'' = -\frac{2}{t^2} + \frac{2}{t^3} = \frac{-2(t-1)}{t^3} < 0$. Следовательно, функция выпукла и данное неравенство верно.

8.

$$a_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(n+1)^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m}\Bigg|_{x=\frac{1}{(n+1)^2}} =$$

$$= -\ln(1-x)\Big|_{x=\frac{1}{(n+1)^2}} = -\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \bigl(\ln n - 2\ln(n+1) + \ln(n+2)\bigr)$$

Рассмотрим частную сумму ряда:

$$S_N = -(\ln 1 - 2\ln 2 + \ln 3 + \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 4 + \ln 3 - 2\ln 4 + \ldots$$
$$\ldots + \ln(N-1) - 2\ln N + \ln(N+1) + \ln N - 2\ln(N+1) + \ln(N+2)) =$$
$$= \ln 2 + \ln\frac{N+1}{N+2}$$

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty}\left(\ln 2 + \ln\frac{N+1}{N+2}\right) = \ln 2$$

9. Представив последний столбец в виде суммы, получим

$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 4 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & n & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & n & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & n \end{vmatrix}$. В первом определителе вычтем последний столбец из всех столбцов, а второй определитель разложим по последнему столбцу. $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} + nD_{n-1} = (n-1)! + nD_{n-1}$, то

есть $\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} &\frac{D_3}{3!} - \frac{D_2}{2!} = \frac{1}{3} \\ &+ \\ &\frac{D_3}{3!} - \frac{D_2}{2!} = \frac{1}{3} \\ &+ \dots + \\ &\frac{D_n}{n!} - \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{n} \end{aligned} \quad ,$$

откуда получим $\frac{D_n}{n!} - \frac{D_2}{2!} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$, и, следовательно, $\frac{D_n}{n!} \sim \ln n$, таким образом, искомый предел равен 1.

10. К большому сожалению, в условии была допущена опечатка, которую организаторы олимпиады вовремя не заметили. Предполагалось для решения уравнение $xy'' - y' + 4x^3 y = 0$, которое значительно легче. При проверке работ оценивались правильно выполненные действия студентов, приводящие к упрощению уравнения. Такими действиями могут быть, например,

а). Переход к новому независимому аргументу $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$. Тогда $y'_x = y'_t \cdot t'_x = 2x \cdot y'_t = 2\sqrt{t} y'_t$ и $y''_{xx} = y''_{tt} \cdot (t'_x)^2 + y'_t \cdot t''_{xx} = y''_{tt} \cdot (2x)^2 + y'_t \cdot 2$, $y''_{xx} = y''_{tt} \cdot 4t + y'_t \cdot 2$. Уравнение с новым независимым аргументом принимает вид $\sqrt{t}\left(y''_{tt} \cdot 4t + y'_t \cdot 2\right) - y'_t \cdot 2\sqrt{t} + 4\sqrt{t} y^3 = 0$, $4\sqrt{t}\left(t y''_{tt} + y^3\right) = 0$, следовательно, $t y''_{tt} + y^3 = 0$.

b). Замена переменных: $x=e^t,\ y=z(t)\cdot e^{-t}$. Тогда $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=e^{-2t}(z'-z)$, $y''_{xx}=\frac{\left(y'_t\right)'_x}{x'_t}=e^{-3t}(z''-3z'+2z)$. Получаем $e^{-2t}(z''-3z'+2z)-e^{-2t}(z'-z)+4e^{-2t}z^3=0$, $z''-4z'+4z^3+3z=0$. После замены переменной $z'=p(z),\ z''=pp'$, получаем уравнение первого порядка: $pp'-4p+4z^3+3z=0$.

11. Положим в уравнении $z=x+1$. Получим $f\left(\frac{z-1}{z}\right)+2f\left(z\right)=z$. Если обозначить $y(z)=\frac{z-1}{z}$, то нетрудно проверить, что $y\left(y\left(z\right)\right)=-\frac{1}{z-1}$ и $y\left(y\left(y\left(z\right)\right)\right)=z$. Подставляя эти соотношения в начальное уравнение, получим следующую систему:

$$\begin{cases} f\left(\frac{z-1}{z}\right)+2f\left(z\right)=z \\ f\left(-\frac{1}{z-1}\right)+2f\left(\frac{z-1}{z}\right)=\frac{z-1}{z} \\ f\left(z\right)+2f\left(-\frac{1}{z-1}\right)=-\frac{1}{z-1} \end{cases}.$$

Решая ее, находим $f(z)=\frac{4}{9}z-\frac{1}{9\left(z-1\right)}-\frac{2(z-1)}{9z}$.

12. Пусть $C=A\cdot B$. Тогда $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\cdot b_{ji}=TrAB$. Условия задачи показывают, что матрицы A и B положительно определены. Пусть W - такая ортогональная матрица, что $WAW^{-1}=A_1$ - диагональная. Тогда матрица $WBW^{-1}=B_1$ тоже положительно определена. Следовательно, $TrAB=Tr\left(W^{-1}WAB\right)=Tr\left(WABW^{-1}\right)=Tr\left(\left(WAW^{-1}\right)\left(WBW^{-1}\right)\right)=TrA_1B_1$. Но $A_1=\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$, где $d_1>0, d_2>0, d_3>0$ и $TrA_1B_1=d_1\cdot b_1^*+d_2\cdot b_2^*+d_3\cdot b_3^*$, где $B_1=\begin{bmatrix} b_1^* & * & * \\ * & b_2^* & * \\ * & * & b_3^* \end{bmatrix}$. Так как B_1 - положительно определена, то $b_1^*,b_2^*,b_3^*>0$, и из $TrA_1B_1=d_1\cdot b_1^*+d_2\cdot b_2^*+d_3\cdot b_3^*$ следует требуемое.

Результаты олимпиады 2005 года.

В олимпиаде приняли участие команды следующих вузов:

- Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики – ИТМО (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет – СПГПУ (2 команды),
- Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена – ГПУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики и процессов управления – СПГУ (ПМПУ)
- Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет – СПГУ(эк),
- Военно-космическая академия им. А.Ф.Можайского – ВКА (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения – СПГУКиТ,
- Военный инженерно-технический университет – ВИТУ,
- Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) – СПГТИ(ТУ),
- Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций – СПГУВК,
- Военно-морской институт радиоэлектроники им. А.С.Попова – ВМИРЭ,
- Пушкинский военный институт радиоэлектроники космических войск – ПВИРЭКВ,
- Северо-западный заочный государственный технический университет – СЗГТУ,
- Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет) – СПГГИ,
- Военно-морской инженерный институт – ВМИИ,
- Государственная морская академия им. адм. С.О.Макарова – ГМА,
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича – СПГУТ,
- Государственный университет аэрокосмического приборостроения – ГУАП,
- Балтийский государственный технический университет (Военмех) – БГТУ,
- Петербургский государственный университет путей сообщения – ПГУПС,
- Санкт-Петербургский Военно-морской институт – корпус Петра Великого – СПВМИ.

Командное первенство

Если от вуза участвовало две команды, то результат второй указан через дробную черту.

I группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ИТМО	148 / 105	1
СПГПУ	134,5 / 50,5	2
СПГУ(ПМПУ)	99	3
ГПУ	37,5	4

II группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ВКА	62 / 29	1
СПГУ (эк)	53	2
ПВИРЭКВ	47,5	3
СПГТИ (ТУ)	43	4
ГУАП	39,5	5
ВИТУ	28,5	6
СПВМИ	24	7
СПГУТ	20,5	8
СПГУКиТ	17,5	9
СПГУВК	12,5	10
ВМИРЭ	11,5	11
БГТУ	7,5	12

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ГМА	32	1
СПГГИ	27,5	2
ВМИИ	19,5	3
СЗГТУ	10,5	4
ПГУПС	9,5	5

Личное первенство

Абсолютный зачет

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сатюков Р.В.	ИТМО	50	1	1 ст.
Тур Н.	СПГУ(ПМПУ)	40	2	2 ст.
Фан Данг Кхоа	СПГПУ	32	3	2 ст.
Синев И.А.	ИТМО	31	4	2 ст.
Нгуен Ван Тханг	СПГПУ	30	5 – 6	3 ст.
Ле Ли Минь Зюй	ГУАП	30	5 – 6	3 ст.

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сатюков Р.В.	ИТМО	50	1	1 ст.
Тур Н.	СПГУ(ПМПУ)	40	2	2 ст.
Фан Данг Кхоа	СПГПУ	32	3	2 ст.
Синев И.А.	ИТМО	31	4	2 ст.
Нгуен Ван Тханг	СПГПУ	30	5	2 ст.
Пименов С.Ю.	ИТМО	29	6	2 ст.
Лебедев М.	СПГПУ	28	7	2 ст.
Царев Ф.Н.	ИТМО	25,5	8 - 9	3 ст.
Олейников А.	СПГПУ	25,5	8 - 9	3 ст.

II группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Ле Ли Минь Зюй	ГУАП	30	1	1 ст.
Петтай П.П.	СПГУ(эк)	29	2	1 ст.
Хващенко Е.К.	ВКА	27	3	2 ст.
Ермаков А.О.	СПВМИ	21	4	2 ст.

III группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Фадеев В.В.	ГМА	23	1	1 ст.
Полякова Е.В.	СПГГИ(ТУ)	12	2	2 ст.
Шуклин А.А.	ГМА	9	3	3 ст.
Дроздов В.Н.	ВМИИ	7	4	3 ст.

Результаты участников, вошедших в командный зачет.

I группа

ИТМО

Сатюков Р.В.	50
Пименов С.Ю.	29
Царев Ф.Н.	25,5
Зворыгин Д.Е.	22
Ковалев А.С.	21,5

СПГПУ

Фан Данг Кхоа	32
Нгуен Ван Тханг	30
Лебедев М.	28
Оленников А.	25,5
Адамьян Д.	19

ГПУ

Смирнов А.	12,5
Нгуен Тхи Тху Хиен	9
Хоанг Нги Хуен	7,5
Чириков А.	5,5
Меркулов А.	3

СПГУ (ПМПУ)

Тур Н.	40
Буздов Мухадин	22
Травин А.	14
Буздов Мухамед	12
Хицко К.	11

II группа

ВКА *)

Хващенко Е.К.	27
Кононов Д.С.	13
Лобков И.А.	11
Сомов А.В.	7
Ясаков Е.А.	4
Филиппенко М.А.	4

СПГТИ(ТУ)

Однолетков М.А.	12
Валеахметов Р.И.	9,5
Кузьменко И.Ю.	9
Доманова О.С.	7,5
Спорягин К.В.	5

ПВИРЭКВ

Расторгуев Ан.С.	14
Ваганов А.А.	11,5
Орлов Р.С.	11
Смирнов М.С.	6
Расторгуев Ал.С.	5

СПГУ (эк)

Петтай П.П.	29
Михайлов И.А.	12
Хотяков М.В.	6
Сердюк И.Н.	4
Акамелков Р.А.	2

ВИТУ

Колесенко Е.А.	10
Тураев А.Г.	8
Кудрицкий И.Б.	6
Гринев А.П.	2,5
Александров П.А.	2

СПГУКиТ

Китанов М.Ю.	7
Моисеева Е.Н.	4,5
Давыдов Д.А.	3
Фединчишин О.Н.	2
Платонов П.Ю.	1

СПГУТ

Гвоздикин И.Д.	9
Белкина М.А.	5
Петрова Е.Г.	5
Городущенко О.М.	1
Дроздов В.С.	0,5

ГУАП

Ле Ли Минь Зюй	30
Семенов П.	6
Касимов А.	2
Тимербаева М.	1,5

ВМИРЭ

Андриевский А.П.	4,5
Потапов А.В.	4
Блынский В.А.	1
Матыцин П.В.	1
Пащенко Е.Г.	1

СПГУВК

Чалдыкин Е.И.	4
Соколов С.С.	3,5
Бадюк М.А.	2
Хан И.А.	2
Бабинин А.И.	1

СПВМИ

Ермаков А.О.	21
Касьянов А.В.	3

БГТУ

Конышев И.И.	7,5

<u>III группа</u>

СПГГИ (ТУ)

Полякова Е.В.	12
Ходаковский Е.С.	5,5
Нгуен Тху Хьен	5
Дау Ань Тхань	2,5
Нгуен Суан Бак	2,5

ПГУПС

Гарбарук Е.В.	4
Ильин А.В.	2,5
Мишин А.А.	1
Болгов Е.Р.	1
Нигматулин Р.А.	1

ВМИИ

Дроздов В.Н.	7
Васильев Н.В.	5,5
Капричников А.А.	4,5
Усманов М.А.	2
Дорожкин А.С.	0,5

СЗГТУ

Снегуров А.А.	5
Фураев В.В.	2
Остапчук С.С.	1,5
Чистяков А.В.	1
Азабина С.Н.	1

ГМА

Фадеев В.В.	23
Шуклин А.А.	9

*) В зачет команды вошли пять участников.

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	51,3	32,7	32,7	52	30,6	25,4	14,7	9	17,6	2,2	18,3	5,5

Приложение.

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2004 года

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2}{\int\limits_0^x e^{2t^2}}$. (2 балла)
2. Нарисовать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\left|z^2-3z\right|+1<|z|+|z-3|$.(3 балла)
3. Найти асимптоты обратной функции f^{-1}, если задана сама функция $f(x)=4x-\operatorname{arctg} x$. (4 балла)
4. Функции $fg,\ gh,\ fh$ бесконечно дифференцируемы. Следует ли отсюда непрерывность хотя бы одной из функций f,g,h хотя бы в одной точке? (5 баллов).
5. В выпуклом n-угольнике наудачу выбираются 2 диагонали. Какова вероятность того, что они пересекаются? (Точкой пересечения считается общая точка двух несовпадающих диагоналей, лежащая внутри многоугольника.) (6 баллов)
6. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{(e^x+1)\left(x^2+1\right)}$.(6 баллов)
7. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$. (6 баллов)
8. В последовательности $\{a_n\}$ $a_1=3,\ a_n=a_{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}$, $n=2,3...$

   Найти $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (7 баллов)
9. Существует ли непрерывная на $(1,+\infty)$ функция $f(t)$ такая, что

   $\int\limits_x^{x^2} f(t)dt=1$ для любого $x>1$. (8 баллов)

10. У симметричной матрицы порядка n все элементы положительны. Докажите, что у нее найдется положительное собственное число. (8 баллов).

11. Функция $f(x)$ такова, что $\int\limits_0^\infty \left(a\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=1$. Найдите максимально возможное значение $f(0)$ в зависимости от a. (10 баллов).

12. Пусть $f(x)$ - многочлен степени n и $\Phi(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{2^n}$. Доказать, что, если все корни $\Phi(x)$ вещественные, то все корни $f(x)$ тоже вещественные. (10 баллов).

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2003 года

1. Решить краевую задачу

$$xy''+2y'-xy=0,\ y(+0)=\lim_{x\to+0}y(x) \text{ - ограничено, } y(\ln 2)=\frac{3}{\ln 16}.$$

(2 балла)

2. Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ непрерывны на [a, b] и дифференцируемы в (a, b), то существует точка $c\in(a,b)$ такая, что

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix}=0$$

(2 балла)

3. Доказать, что многочлены $(z+1)^{2003}+1$ и $z^{20}-2002\cdot z^{10}-2003$ не имеют общих комплексных корней. (4 балла)

4. Пусть $P(x)$ - многочлен степени $n>1$, $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ - его различные корни. Доказать, что $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+\ldots+\frac{1}{P'(x_n)}=0$. (6 баллов)

5. На черных клетках шахматной доски написаны $ch\,x$, а на белых - $sh\,x$. За один ход можно все функции, стоящие на какой-то горизонтали или какой-то вертикали заменить на их производные. Можно ли не более, чем за 2003 хода получить расстановку, при которой по краям доски написаны $ch\,x$, а в остальных клетках $sh\,x$? (6 баллов)

6. Последовательность x_n такая, что

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}},\ n=1,2,\ldots.$$

Докажите, что $\sum_{n=1}^{\infty} x_n < 1{,}025$.(6 баллов)

7. Пусть A – квадратная матрица с $\det A \neq 0$ (т.е. невырожденная), в каждой строке которой стоит только одно число, отличное от 0 и равное +1 или –1. Доказать, что при некотором натуральном m справедливо равенство: $A^m = A^T$, где A^T - транспонированная матрица A.(8 баллов)

8. Составьте уравнение поверхности, получаемой вращением кривой $x^3 + y^3 = 3xy;\ z = 0$ вокруг прямой $x = y = z$. (8 баллов)

9. В пространстве R^4 заданы четырехмерный куб и трехмерная гиперплоскость, не параллельная ни одному из ребер куба. Доказать, что она содержит не более 6 вершин куба. (9 баллов)

10. Найдите $y^{(n)}(0)$, если $y(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}$. (10 баллов)

11. Даны две матрицы А и В размерами 3×2 и 2×3 соответственно, причем известно, что

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$. Найти ВА. (10 баллов)

12. Найти $\sum_{n=1}^{\infty} arcctg\, 2u_n^2$, где

$u_1 = 1,\quad u_2 = 1,\quad u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$. (10 баллов)