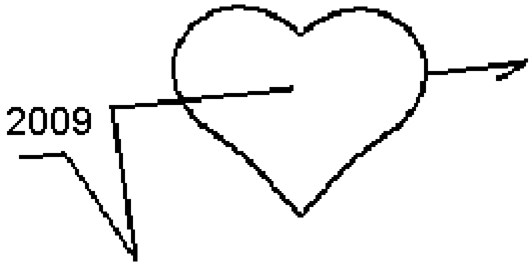
Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Студенческие математические олимпиады Санкт-Петербурга и Северо-Запада России

2009г.



Санкт-Петербург
2009

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Студенческие математические олимпиады Санкт-Петербурга и Северо-Запада России

2009г.

Санкт-Петербург
2009

В 2000 - 2006 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО). С 2007 г. наряду с городской олимпиадой проводится открытая студенческая олимпиада по математике Северо-Запада России. В 2009 г. кроме команд из 18 вузов Санкт-Петербурга в ней участвовали команды из Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого, Вологодского государственного педагогического университета, Вологодского государственного технического университета и Московского физико-технического института (государственного университета). Олимпиада Санкт-Петербурга проводилась по тем же правилам, что и ранее. Участники были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую - с объемом от 400 до 550 часов, в третью - с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 7 человек на городскую олимпиаду (в командный зачет входили 5 участников с лучшими результатами из команды). В личном зачете участвовали все заявленные студенты. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две). На олимпиаду Северо-Запада России вуз мог выставить одну команду из 3 человек, причем составы команд для городской олимпиады и олимпиады округа могли пересекаться. В зачет шли результаты всех трех участников.

Олимпиада проводилась в воскресенье 12 апреля 2009 года. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач.

Председателем жюри был профессор СПбГУ Н.А. Широков. В оргкомитет олимпиады входили: ректор СПбГУ ИТМО, проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., доц., к.ф.-м.н. Лобанов И.С., ст. преп. Сытенко Н.В., асс. Гортинская Л.В., асс. Трифанова Е.С.

Составители: проф., д.ф.-м.н. Н.А. Широков, проф., д.ф.-м.н. Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Трифанова Е.С., доц., к.ф.-м.н. Рыжков А.Е., ст. преп. Родина Т.В., асп. Петтай П.П., студ. Трифанов А.И., доц. Блинова И.В.

Задачи олимпиады
12 апреля 2009 года

1. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<2,\ n\ge 2$ *(3 балла)*

2. Доказать, что $\sin x+\arcsin x>2x$ при $x>0$. *(4 балла)*

3. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ не зависит от α. *(4 балла)*

4. Доказать, что все решения уравнения $\left(1+x^2+y^2\right)y'=1$ ограничены на всей оси. *(4 балла)*

5. Существуют ли такие ортогональные матрицы X и Y порядка 3×3, что

$$X^3Y^2X^5Y^7X^4Y^5=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}?$$ *(5 баллов)*

6. Найдите общий вид всех многочленов над R, которые делятся без остатка на сумму своих производных всех порядков. *(6 баллов)*

7. Круг радиуса r катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=R^2$ $(R>r)$, оставаясь внутри нее. Траектория некоторой точки M окружности катящегося круга называется гипоциклоидой. Во что превращается гипоциклоида при $r=R/2$? Ответ обосновать. *(6 баллов)*

8. Доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx=\int\limits_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx$ при любых $p,q\in R$. *(6 баллов)*

9. Доказать, что кривая $\vec{r}=\left(t^2-1,\,t^2+2,\,t^3\right)$ - плоская, и найти уравнение плоскости, в которой она лежит. *(8 баллов)*

10. Последовательность задана рекуррентно:

$x_1=0,\ x_2=1,\ x_n=(n-1)\left(x_{n-1}+x_{n-2}\right),\ n\ge 3$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n!}$. *(8 баллов)*

11. Найти все определенные на $(0,\infty)$ дважды дифференцируемые функции f такие, что для любого x: $f'(x)>0$ и $f\left(f'(x)\right)=-f(x)$. *(10 баллов)*

12. Известно, что матрицы A,B,C попарно перестановочны. Доказать, что найдутся вещественные числа α,β,γ, не все равные нулю, такие, что $\det\left(\alpha A+\beta B+\gamma C\right)=0$. *(10 баллов)*

Ответы и решения

1. Обозначим $A=\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$. Прологарифмируем. Тогда

$$\ln A=\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=$$

$=\frac{1/4}{1-1/2}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $A<\sqrt{e}<2$.

2. Сделаем замену $x=\sin t,\ t\in(0,\ \pi/2]$, неравенство принимает вид $\sin(\sin t)+t>2\sin t$. Рассмотрим функцию $y(t)=\sin(\sin t)+t-2\sin t$. Имеем $y'=\cos(\sin t)\cdot\cos t+1-2\cos t$;

$$y''=-\sin(\sin t)\cdot\cos^2 t-\cos(\sin t)\cdot\sin t+2\sin t=$$

$$=\left(\sin t-\sin(\sin t)\cdot\cos^2 t\right)+\sin t\left(1-\cos(\sin t)\right).$$

Так как $\sin t<t$ при $t>0$, то $\sin(\sin t)<\sin t$. Тогда $y''>\sin t\left(1-\cos^2 t\right)+\sin t\left(1-\cos(\sin t)\right)>\sin^3 t>0$ при $0<t\le\pi/2$.

Следовательно, $y'(t)>y'(0)=0$, а значит, $y(t)>y(0)=0$.

Замечание. Можно выполнять аналогичные действия напрямую (для исходной функции от x), не делая замены переменной.

3. Разобьем интеграл на два:

$\int_0^1\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}+\int_1^\infty\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}=I_1+I_2$. В интеграле I_1 сделаем замену $x=1/y$. После преобразований получим $I_1=\int_1^\infty\frac{x^\alpha dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$. Отсюда $I_1+I_2=\int_1^\infty\frac{dx}{1+x^2}$, т.е. нет зависимости от α.

4. Имеем

$$\left|y(x)\right| = \left|y(0) + \int_0^x \frac{dx}{1+x^2+y^2(x)}\right| \le \left|y(0)\right| + \left|\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}\right| < \left|y(0)\right| + \frac{\pi}{2}.$$ Значит, $y(x)$ ограничена на всей оси.

5. Нет. У любой ортогональной матрицы определитель равен 1 или -1. По теореме об определителе произведения, определитель левой части равен 1 (суммарные степени определителей X и Y - четные), а определитель правой части равен -1.

6. Обозначим $P = P(x)$ - многочлен степени $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что при $n=1$, $P = a_1 x + a_2 \vdots a_1 \Rightarrow P$ имеет вид $P = a(x+b)$, где $a, b \in \mathbb{R},\ a \ne 0$. Рассмотрим $n \ge 2$. Многочлен P можно представить в виде $P = \left(\frac{x}{n} + \alpha\right) \cdot T$, где $T = P' + P'' + \ldots + P^{(n)}$. Тогда $P' = \frac{1}{n}T + \left(\frac{x}{n} + \alpha\right)T'$, и $T = P' + T'$. Получаем дифференциальное уравнение для T:

$$T - T' = \frac{1}{n}T + \left(\frac{x}{n} + \alpha\right)T' \Rightarrow \left(x + (\alpha+1)n\right)T' = (n-1)T \Rightarrow$$

$$\int \frac{dT}{T} = (n-1)\int \frac{dx}{x + (\alpha+1)n} \Rightarrow T = C\left(x + (\alpha+1)n\right)^{n-1},$$ где $C \in \mathbb{R},\ C \ne 0$.

Тогда

$$P = \left(\frac{x}{n} + \alpha\right)T = a\left(x + b - n\right)\left(x+b\right)^{n-1} = a\left(x + b - n\right)\left(x+b\right)^{n-1} =$$

$$= a\left(x+b\right)^n - an\left(x+b\right)^{n-1} = Q - Q',$$ где $a = C/n \ne 0$, $b = \left(\alpha+1\right)n$, $Q = a\left(x+b\right)^n$.

7. В отрезок $\left[-R, R\right]$. Пусть в исходный момент центр катящегося круга находится в точке $\left(R/2, 0\right)$ и точка M имеет координаты $\left(R,\ 0\right)$. После поворота на угол φ центр окружности окажется в точке $K\left(\frac{R}{2}\cos\varphi, \frac{R}{2}\sin\varphi\right)$.

Точка M переместится в точку $M'\left(x, y\right)$, и точка касания Q будет иметь координаты $\left(R\cos\varphi, R\sin\varphi\right)$. Так как круг катится без скольжения, длины дуг

MQ и $M'Q$ равны, то есть $-\frac{R}{2}\cdot\psi = R\varphi$, где $\psi = \angle QKM = -2\varphi$. Введем систему координат $x'Ky'$ с началом в точке K, а оси Kx', Ky' параллельны осям Ox, Oy. Тогда $\angle x'KQ = \varphi, \quad \angle x'KM' = -\varphi$, координаты точки M' в новой системе равны $\left(\frac{R}{2}\cos\varphi, \ -\frac{R}{2}\sin\varphi\right)$, а в исходной $\left(R\cos\varphi, 0\right)$. То есть, точка *M* движется по отрезку $\left[-R, R\right]$.

8. Обозначим $I_1 = \int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx$, $I_2 = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx$. В интеграле I_1 сделаем замену переменной $t = x^p$, а в интеграле I_2 замену $t = 1-x^q$. Тогда получим $I_1 = \int_0^1 \sqrt[q]{1-t}\,d\left(\sqrt[p]{t}\right)$, $I_2 = -\int_0^1 \sqrt[p]{t}\,d\left(\sqrt[q]{1-t}\right)$. Вычитая, получим $I_1 - I_2 = \int_0^1 d\left(\sqrt[q]{1-t}\cdot\sqrt[p]{t}\right) = 0$.

9. Найдем уравнение соприкасающейся плоскости. Имеем $r'\left(2t, 2t, 3t^2\right)$, $r''\left(2, 2, 6t\right)$. Нормальный вектор соприкасающейся плоскости равен $\left[r', r''\right] = 6t^2\vec{i} - 6t^2\vec{j} = 6t^2\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$. Нормальный вектор коллинеарен вектору $\vec{i} - \vec{j}$ во всех точках кривой. Следовательно, соприкасающаяся плоскость одна и та же во всех точках кривой. Возьмем нормальный вектор $\vec{n}\left(1, -1, 0\right)$ и точку на кривой $N\left(0, 3, 1\right)$ при $t = 1$. Тогда уравнение плоскости $x - y + 3 = 0$.

Замечание. Можно было заметить, что если точка $A\left(x, y, z\right)$ принадлежит исходной кривой, то выполняется $x - y + 3 = 0$. То есть, кривая принадлежит плоскости, задаваемой этим уравнением.

10. Обозначим $y_k = \frac{x_k}{k!}$. Тогда для $k \geq 3$ будет выполняться

$$y_k - y_{k-1} = \frac{x_k}{k!} - \frac{x_{k-1}}{\left(k-1\right)!} = \frac{\left(x_{k-1} + x_{k-2}\right)\left(k-1\right)}{k!} - \frac{x_{k-1}}{\left(k-1\right)!} =$$

$=\dfrac{x_{k-2}(k-1)-x_{k-1}}{k!}=\dfrac{y_{k-2}(k-1)!-y_{k-1}(k-1)!}{k!}=\dfrac{y_{k-2}-y_{k-1}}{k}$. Следовательно, имеем $y_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\ldots+\dfrac{(-1)^n}{n!}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=e^{-1}$.

11. Так как $f'(x)>0$, то $f\left(f'\left(f'(x)\right)\right)=-f\left(f'(x)\right)=f(x)$. Отсюда по строгой монотонности функции f имеем $f'\left(f'(x)\right)=x$ $(*)$. Продифференцируем исходное равенство: $f'\left(f'(x)\right)\cdot f''(x)=-f'(x)$. Используя $(*)$ находим $xf''(x)=-f'(x)$. Пусть $y=f'(x)$. Тогда имеем дифференциальное уравнение $xy'=-y$, решение которого есть $y=\dfrac{C}{x}$, $C>0$, т.к. $y(x)>0$. Следовательно, $f(x)=C\ln(ax)$. Подставим в исходное уравнение:

$$C\ln\left(a\frac{C}{x}\right)=-C\ln(ax)\Leftrightarrow C\ln\left(a\frac{C}{x}\cdot ax\right)=0\Leftrightarrow$$

$\ln\left(a^2C\right)=0\Leftrightarrow a^2C=1\Leftrightarrow a=\dfrac{1}{\sqrt{C}}$. Окончательно, $f(x)=C\ln\dfrac{x}{\sqrt{C}}$, $C>0$.

12. Из перестановочности матриц A, B, C следует, что у них существует общий собственный вектор. Действительно, пусть λ_1 - собственное число матрицы *A* (может быть, комплексное), V_1 - соответствующее собственное подпространство оператора *A*. Тогда оператор *B* отображает V_1 в V_1. Действительно, если $x\in V_1$, т.е. $Ax=\lambda_1 x$, то $A(Bx)=BAx=\lambda_1 Bx$, т.е. $Bx\in V_1$. Следовательно, найдется собственное число λ_2 оператора *B*, действующего в V_1 и собственное подпространство V_2 в V_1, поэтому найдется собственное число λ_3 и собственный вектор $x\in V_2$, который является также собственным вектором операторов *A* и *B*. Комплексные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются двумерными векторами над полем $\mathbb{R}$. Поэтому они линейно зависимы над $\mathbb{R}$, т.е. для ненулевого набора действительных чисел α, β, γ: $\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3=0$. Следовательно, $(\alpha A+\beta B+\gamma C)x=(\alpha\lambda_1+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_3)x=0$, т.е. матрица $\alpha A+\beta B+\gamma C$ вырождена.

Результаты олимпиады 2009 года

В олимпиадах приняли участие команды следующих вузов:

- Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики – ИТМО (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет – ГПУ (2 команды),
- Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена – РГПУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет – ГУ(физ) (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет – ГУ(эк) (2 команды),
- Балтийский государственный технический университет «ВоенМех» им. Д.Ф. Устинова – БГТУ (2 команды),
- Военно-космическая академия им. А.Ф.Можайского – ВКА (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения – ГУКиТ,
- Военный инженерно-технический университет – ВИТУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) – ГТИ(ТУ) (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций – ГУВК,
- Северо-западный заочный государственный технический университет – СЗГТУ,
- Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет) – ГГИ(ТУ),
- Государственная морская академия им. адм. С.О.Макарова – ГМА,
- Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет – ГАСУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ) – ГЭТУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения – ГУАП,
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций – ГУТ,
- Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого – НовГУ,
- Вологодский государственный педагогический университет – ВГПУ,
- Вологодский государственный технический университет – ВоГТУ,
- Московский физико-технический институт (государственный университет) – МФТИ.

Командное первенство

Если от вуза участвовало две команды, то результат второй указан через дробную черту.

Северо-Запад

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ИТМО	187	1 (1 ст.)
ГУ(физ)	180	2 (2 ст.)
МФТИ	108	3 (3 ст.)
ГПУ	103	4 (3 ст.)
БГТУ	64	5
ГУ(эк)	59	6
НовГУ	53,5	7
РГПУ	48	8
ГТИ(ТУ)	33	9
ГУВК	28	10
ВГПУ	27	11
ВИТУ	25,5	12-13
ГЭТУ	25,5	12-13
ГУКиТ	25	14
ВКА	14	15
ВоГТУ	13,5	16
ГМА	9	17
ГУАП	6	18
ГГИ	5,5	19
СЗГТУ	4	20
ГАСУ	3	21
ГУТ	0,5	22

Санкт-Петербург

I группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ИТМО	280/135	1 (1 ст.)
ГУ(физ)	279/168	2 (1 ст.)
ГПУ	167/110	3 (2 ст.)
БГТУ	101/47,5	4 (3 ст.)
ГЭТУ	65	5
РГПУ	51	6

II группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ГУ(эк)	76	1 (1 ст.)
ГТИ (ТУ)	48/8	2 (2 ст.)
ГУТ	37	3 (3 ст.)
ВИТУ	33,5/7,5	4
ГУВК	30	5
ВКА	27,5/18	6
ГУАП	12	7
ГАСУ	8/7,5	8

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ГУКиТ	30,5	1 (1 ст.)
ГМА	30	2 (1 ст.)
ГГИ	8,5	3
СЗГТУ	4,5	4

Личное первенство

Северо-Запад

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сатюков Р.В.	ИТМО	74	1	1 ст.
Касаткин В.Э.	ГУ(физ)	73	2	1 ст.
Капун Е.Д.	ИТМО	64	3	2 ст.
Качковский И.В.	ГУ(физ)	60	4	2 ст.
Мищенко П.А.	МФТИ	54	5	3 ст.
Буздалов М.В.	ИТМО	49	6	3 ст.
Ву Ван Куанг	ГПУ	48	7	3 ст.
Вениаминов Н.А.	ГУ(физ)	47	8	3 ст.
Мостовых П.С.	БГТУ	43	9	3 ст.
Бельтюков Я.М.	ГПУ	34	10	3 ст.
Викулаев П.С.	ГУ(эк)	31	11	3 ст.
Кожин Е.С.	МФТИ	30	12	3 ст.

Санкт-Петербург

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сатюков Р.В.	ИТМО	74	1	1 ст.
Касаткин В.Э.	ГУ(физ)	73	2	1 ст.
Капун Е.Д.	ИТМО	64	3	2 ст.
Качковский И.В.	ГУ(физ)	60	4	2 ст.
Сафронов П.Г.	ГУ(физ)	54	5-6	3 ст.
Буздалов М.В.	ИТМО	49	5-6	3 ст.
Ву Ван Куанг	ГПУ	48	7	3 ст.
Василевская Е.С.	ГУ(физ)	47,5	8	3 ст.
Вениаминов Н.А.	ГУ(физ)	47	9	3 ст.

II группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Викулаев П.С.	ГУ(эк)	31	1- 2	1 ст.
Нгуен Занг	ГУТ	31	1 - 2	1 ст.
Горохова Е.А.	ГУ(эк)	23	3	2 ст.

Демидов П.А.	ГТИ(ТУ)	16	4	3 ст.
Бодалев И.С.	ГТИ(ТУ)	15	5 - 6	3 ст.
Павлов С.М.	ГУВК	15	5 - 6	3 ст.
Косарев Д.А.	ГТИ(ТУ)	14,5	7	3 ст.

III группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Величко А.С.	ГУКиТ	21	1	1 ст.
Сенников А.В.	ГМА	12	2	2 ст.

Поощрительными дипломами награждены: Шумов И.К. (НовГУ), Соколов М.В. (ВГПУ), Сорокин А.Е. (ВоГТУ).

Результаты участников, вошедших в командный зачет

Северо-Запад

ГУ(физ)

Вениаминов Н.А.	47
Качковский И.В.	60
Касаткин В. Э.	73

ИТМО

Сатюков Р.В.	74
Капун Е.Д.	64
Буздалов М.В.	49

МФТИ

Амиров С. М.	24
Мищенко П. А.	54
Кожин Е. С.	30

ГГИ

Степанова О.С.	5,5

НовГУ

Васильева А. В.	15
Соловьев А. К.	18
Шумов И. К.	20,5

ГЭТУ

Фирсов М.А.	11
Осипов А.В.	10
Сосновский В.	4,5

ГПУ

Ведерников Д.А.	21
Бельтюков Я.М.	34
Ву Ван Куанг	48

ВКА

Санников А.М.	9,5
Васильев С.И.	4,5

РГПУ

Иванушкина Н.В.	20
Никулина Ю.С.	27,5
Кондратьев Н.В.	0,5

ГУ(эк)

Хотяков М.В.	5
Горохова Е.А.	23
Викулаев П.С.	31

ВИТУ

Кулагин В.С.	10,5
Бегун М.Я.	2
Коныгин И.О.	13

ГМА

Шубин С.В.	5
Базарова Е.М.	4

ВГПУ

Житов А.Ю.	6
Трифонов В.А.	8
Соколов М.В.	13

ГУВК

Павлов С.М.	15
Журавлев А.М.	11
Добрынина О. А.	2

ГТИ(ТУ)

Бодалев И.С.	15
Демидов П.А.	16
Иродов И.О.	2

СЗГТУ

Каменкова М.К.	4

ГАСУ

Ситникова А.Ю.	1,5
Кудрина И.А.	1
Скок Ю.А.	0,5

ВоГТУ

Сорокин А.Е.	10,5
Голунова О.С.	1
Широков Н.А.	2

БГТУ

Мостовых П. С.	43
Сайфуллин Т. И.	12
Величко В.Е.	9

ГУКиТ

Величко А. С.	21
Алёшин Т.С.	4

ГУАП

Радевич Д.В.	3
Петрин Н.А.	1
Кузьмин В.С.	2

ГУТ

Свидерский Е. С.	0,5

Санкт-Петербург

I группа

ИТМО

Сатюков Р.В.	74
Буздалов М.В.	49
Капун Е.Д.	64
Дворкин М. Э.	47
Феськов А. Г.	46

РГПУ

Никулина Ю. С.	27,5
Курилов И. А.	3
Кондратьев Н. В.	0,5
Иванушкина Н. В.	20

ГУ(физ)

Вениаминов Н. А.	47
Качковский И. В.	60
Касаткин В. Э.	73
Сафронов П. Г.	54
Сандомирский Ф. А.	45

ГЭТУ

Фирсов М. А.	11
Осипов А. В.	10
Сосновский В. А.	4,5
Бородин С. А.	1,5
Нгуен Чонг Туен	38

ГПУ

Бельтюков Я. М.	34
Ву Ван Куанг	48
Утёсов О. И.	28
Быков А. С.	32
Киселев Ю. Ю.	25

БГТУ

Мостовых П.С.	43
Сайфуллин Т.И.	12
Балясников А. Е.	23
Нарыжный Н. С.	13
Шардыко И. В.	101

II группа

ГУВК

Павлов С.М.	15
Журавлев А.М.	11
Ершова С.А.	1
Добрынина О.А.	2
Гайдук В.Б.	1

ГУ(эк) *)

Хотяков М. В.	5
Горохова Е. А.	23
Викулаев П. С.	31
Бенсон И. Н.	8,5
Грибовский А. А.	5
Серманова И. А.	8,5

***)** В зачет команды вошли пять участников.

ГУАП

Радевич Д. В.	3
Петрин Н. А.	1
Кузьмин В. С.	2
Ахмедов Т. О.	4
Метлов Е. Ф.	2

ВИТУ

Семенченко Ю.А.	4,5
Кулагин В.С.	10,5
Бегун М.Я.	2
Коныгин И.О.	13
Смирнов А.И.	3,5

ГТИ (ТУ)

Бодалев И.С.	15
Демидов П.А.	16
Косарев Д.А.	14,5
Иродов И.О.	2
Гранкин Д.В.	0,5

ВКА

Санников А.Н.	9,5
Васильев С. И.	4,5
Гурьев Е. С.	8,5
Дорохлевич В. В.	3
Минниханов Р. Ш.	2

ГАСУ

Ситникова А. Ю.	1,5
Кудрина И. А.	1
Скок Ю. А.	0,5
Данилин А. А.	5

ГУТ

Тимченко С. В.	2
Нгуен Занг	31
Закиров А. М.	4

<u>III группа</u>

ГГИ

Степанова О.С.	5,5
Киселев Е.А.	2
Гаврилова К.А.	1

СЗГТУ

Каменкова М. К.	4
Абрамович А. В.	0,5

ГМА

Шубин С. В.	5
Базарова Е. М.	4
Кирченко Е. М.	4
Занько В. Н.	5
Сенников А. В.	12

ГУКиТ

Величко А.С.	21
Алёшин Т.С.	4
Велижанина С.С.	1,5
Коновалова М.В.	2
Тесёлкин А.В.	2

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	48,3	53,3	47,3	38,5	48,6	15,5	43	26	68	20,4	16	8,4

Задачи олимпиады **2008 года**

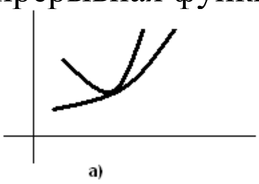
1. Как изменится определитель 2008-го порядка $\det\{a_{ik}\}$, если каждый его элемент a_{ik} умножить на 2008^{i-k}? А определитель 2007-го порядка? (3 балла)

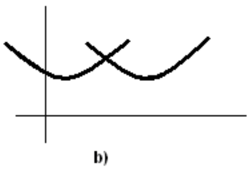
2. Вычислить $\int\limits_0^{2008} x(x-4)(x-8)\cdot\ldots\cdot(x-2008)\,dx$ (3 балла)

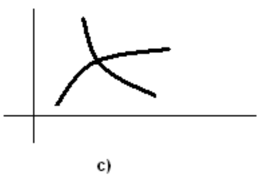
3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ (4 балла)

4. Найти кривую, образованную центрами окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку. (4 балла)

5. Могут ли графики двух решений уравнения $y''+q(x)y=0$ ($q(x)$ – непрерывная функция) располагаться так, как показано на рисунке?







(5 баллов)

6. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$5y+y'^2=x(x+y')$$ (6 баллов)

7. Доказать, что многочлен $x^{18n}(x^5+1)+x^{12n+1}(x^2+1)+x^{6n+2}(x^2+1)$, $n\in\mathbb{N}$ делится на многочлен $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$. (6 баллов)

8. Даны n комплексных чисел $c_1,c_2,\ldots,c_n$ таких, что изображающие их точки плоскости являются вершинами выпуклого n-угольника. Доказать, что если $(z-c_1)^{-1}+(z-c_2)^{-1}+\ldots+(z-c_n)^{-1}=0$, то отвечающая z точка плоскости лежит внутри этого n-угольника. (7 баллов)

9. В действительной квадратной матрице заданы все элементы, кроме лежащих на диагонали. Доказать, что на пустых местах можно расставить нули и единицы так, чтобы матрица оказалась невырожденной. (7 баллов)

10. Вычислить $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty |\ln x-\ln y| e^{-(x+y)}dxdy$ (7 баллов)

11. Показать, что для любого фиксированного целого $m\geq 2$ ряд сходится только для одного фиксированного значения x и найти сумму ряда для этого x.

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m-1}-\frac{x}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{2m-1}-\frac{x}{2m}+\frac{1}{2m+1}+\ldots+\frac{1}{3m-1}-\frac{x}{3m}+\frac{1}{3m+1}+\ldots$$

(9 баллов)

12. Пусть A и B - эрмитовы матрицы n- го порядка, $A^2=A,\ B^2=B,$ $AB=-BA,$ X – матрица столбец $\left(X\in\mathbb{C}^n\right)$, X^* – транспонированная и комплексно сопряженная матрица, $X^*X=1$. Доказать, что $\left(X^*AX\right)^2+\left(X^*BX\right)^2\leq 1.$ (10 баллов)