Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Студенческие математические олимпиады Санкт-Петербурга и Северо-Запада России

2010г.

Санкт-Петербург
2010

В 2000 - 2006 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО). С 2007 г. наряду с городской олимпиадой проводится открытая студенческая олимпиада по математике Северо-Запада России. В 2010 г. кроме команд из 21 вуза Санкт-Петербурга в ней участвовали команды из Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого и Московского института электронной техники (технического университета). Олимпиада Санкт-Петербурга проводилась по тем же правилам, что и ранее. Участники были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую - с объемом от 400 до 550 часов, в третью - с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 7 человек на городскую олимпиаду (в командный зачет входили 5 участников с лучшими результатами из команды). В личном зачете участвовали все заявленные студенты. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две). На олимпиаду Северо-Запада России вуз мог выставить одну команду из 3 человек, причем составы команд для городской олимпиады и олимпиады округа могли пересекаться. В зачет шли результаты всех трех участников.

Олимпиада проводилась в воскресенье 16 мая 2010 года. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач.

Председателем жюри был профессор СПбГУ Н.А. Широков. В оргкомитет олимпиады входили: ректор СПбГУ ИТМО, проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., доц., к.ф.-м.н. Лобанов И.С., асс. Трифанов А.И., асс. Лоторейчик В.Ю., доц. Блинова И.В., доц. Трифанова Е.С.

Составители: проф., д.ф.-м.н. Н.А. Широков, проф., д.ф.-м.н. Попов И.Ю., доц.: к.ф.-м.н. Фролов В.М., к.ф.-м.н. Рыжков А.Е., к.ф.-м.н. Трифанова Е.В, к.т.н. Блинова И.В., ст. преп. Родина Т.В., асс.: Трифанов А.И., Петтай П.П., Лоторейчик В.Ю.

Задачи олимпиады
16 мая 2010 года

1. Даны две параболы $y = x^2 + 10x + 23,\ y = 18x - 3x^2 - 25$ и прямая $y = 2 - x$. Найдите отношение площадей сегментов, отсекаемых прямой от парабол. *(3 балла)*

2. Найти максимальное значение определителя третьего порядка, у которого два элемента равны 4, а остальные равны 1 или -1. *(3 балла)*

3. Имеются три квадратные вещественные матрицы одинакового порядка A, B, C, причем матрица A обратима, а $(A - B)C = BA^{-1}$. Доказать, что $C(A - B) = A^{-1}B$. *(4 балла)*

4. Найти все вещественные непрерывно-дифференцируемые функции f на $\mathbb{R}$ такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$: $(f(x))^2 = \int\limits_0^x ((f(t))^2 + (f'(t))^2)dt + 2010.$ *(4 балла)*

5. Пусть $t = g(x)$-решение уравнения $t^3 + t = x$ при $x \geq 0$. Найти $\int\limits_0^2 g(x)dx$.

(4 балла)

6. Пусть $x_1, x_2, \dots x_n$- вещественные числа. Доказать, что ранг матрицы $\left(\sin\left(x_i - x_j\right)\right)_{i,j=1,2,\dots n}$ не превосходит 2. *(5 баллов)*

7. Многочлен $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + 1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n вещественных корней. Докажите, что $P(2) \geq 3^n$.

(6 баллов)

8. Функция f дважды дифференцируема на прямой и удовлетворяет уравнению $f''(x) + f(x) = -xg(x)f'(x)$, где $g(x) \geq 0$. Доказать, что $f(x)$ ограничена. *(6 баллов)*

9. Существует ли окружность, целиком лежащая на поверхности $x^4 + y^4 + z^4 = a^4,\ a > 0$? *(6 баллов)*

10. Докажите, что если A и B- вещественные положительно определенные симметричные матрицы порядка n, то $\det(A + B) \geq \det A + \det B$. *(7 баллов)*

11. Пусть $0 < a, b < 1,\ f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{b^n + x}$. При каких значениях параметров сходится интеграл $\int\limits_0^1 f^2(x)dx$? *(9 баллов)*

12. Существует ли вектор-функция

$\overline{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k},$ удовлетворяющая свойствам:

а) P,Q,R имеют непрерывные частные производные при всех $(x,y,z)\neq(0,0,0),$

б) $rot\overline{F}=\bar{0}$ при всех $(x,y,z)\neq(0,0,0),$

в) $\overline{F}(x,y,0)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}\bar{i}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\overline{j}$ при всех $(x,y,0)\neq(0,0,0)$? *(9 баллов)*

Ответы и решения

1. Первая парабола получается из второй гомотетией с центром $M(1;1)$ и коэффициентом $k=-3:(x,y)\to(4-3x;\,4-3y)=(x';y')$. Если $y=18x-3x^2-25$, то $y'=4-3(18x-3x^2-25)=79-54x+9x^2=79-54\cdot\dfrac{4-x'}{3}+9\cdot\dfrac{(4-x')^2}{9}=$

$=23+10x'+x'^2$.

Прямая $y=2-x$ проходит через центр гомотетии и, значит, сегмент, отсекаемый от первой параболы, является образом сегмента, отсекаемого от второй параболы. Иными словами: первый сегмент подобен второму с коэффициентом 3. Так как площади S_1 и S_2 подобных фигур относятся как квадрат коэффициента подобия, то $\dfrac{S_1}{S_2}=9$.

2. Определитель $\begin{vmatrix}4 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}$ равен 25. Покажем, что большее значение невозможно. Действительно, если в матрице элементы, равные 4, находятся в одной строке (столбце), то, разлагая его по элементам этой строки (столбца), найдем, что значение определителя не превосходит $4\cdot2+4\cdot2+2=18$. Если элементы, равные 4, находятся в разных строках и столбцах, то определитель равен сумме членов, абсолютная величина одного из которых равна 16, двух - 4 и трех - 1. Если хотя бы один из членов равен (-16) или (-4), то величина определителя меньше, чем 25, поэтому максимальный определитель перестановкой строк и столбцов приводится к виду $\begin{vmatrix}4 & a & b\\ -a & 1 & d\\ c & -d & 4\end{vmatrix}$, где

$a, b, c, d \in \{-1; +1\}$, а максимальное значение такого определителя, очевидно, равно 25.

3. $(A-B)C = BA^{-1} \Leftrightarrow AC - BC - BA^{-1} + AA^{-1} = E \Leftrightarrow$

$A(C + A^{-1}) - B(C + A^{-1}) = E \Leftrightarrow (A-B)(C + A^{-1}) = E$.

Значит, квадратная матрица $A - B$ обратима и тогда

$(C + A^{-1})(A - B) = E \Leftrightarrow C(A-B) + A^{-1}A - A^{-1}B = E \Leftrightarrow C(A-B) = A^{-1}B$.

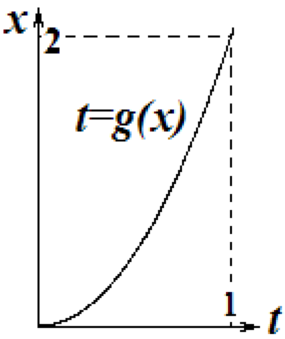
4. Данное соотношение выполнено при всех x тогда и только тогда, когда значения левой и правой частей при $x = 0$ равны (то есть $\left(f(0)\right)^2 = 2010$), и при всех x равны их производные, т.е.

$$2f(x)f'(x) = \left(f(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(x) - f'(x)\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = Ce^x. \ f(0) = \pm\sqrt{2010} \Rightarrow$$

$$f(x) = \pm\sqrt{2010}e^x.$$

5.



$$x = t^3 + t$$

$$x' = 3t^2 + 1 > 0$$

$t = g(x)$ - обратная функция

$\int_0^2 g(x)dx$ - площадь криволинейной трапеции.

$$\int_0^2 g(x)dx = 1\cdot 2 - \int_0^1 (t^3 + t)dt = 2 - \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right)_0^1 \Bigg| = \frac{5}{4}.$$

6.

$$\begin{pmatrix} \sin(x_1 - x_1) & \sin(x_1 - x_2) & \dots & \sin(x_1 - x_n) \\ \sin(x_2 - x_1) & \sin(x_2 - x_2) & \dots & \sin(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sin(x_n - x_1) & \sin(x_n - x_2) & \dots & \sin(x_n - x_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} e^{i(x_1 - x_1)} & e^{i(x_1 - x_2)} & \dots & e^{i(x_1 - x_n)} \\ e^{i(x_2 - x_1)} & e^{i(x_2 - x_2)} & \dots & e^{i(x_2 - x_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i(x_n - x_1)} & e^{i(x_n - x_2)} & \dots & e^{i(x_n - x_n)} \end{pmatrix} - \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} e^{-i(x_1 - x_1)} & e^{-i(x_1 - x_2)} & \dots & e^{-i(x_1 - x_n)} \\ e^{-i(x_2 - x_1)} & e^{-i(x_2 - x_2)} & \dots & e^{-i(x_2 - x_n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{-i(x_n - x_1)} & e^{-i(x_n - x_2)} & \dots & e^{-i(x_n - x_n)} \end{pmatrix}$$

Ранг обеих матриц равен 1, т.к. все строки пропорциональны первой строке. Следовательно, все строки суммы матриц являются линейной комбинацией двух строк, т.к. векторы, соответствующие строкам исходной матрицы лежат в плоскости. Значит, любые три строки линейно зависимы (вообще говоря, с комплексными коэффициентами).

Пусть u_1, u_2, u_3 - любые три строки исходной матрицы. Существуют $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ не все равные нулю (пусть $\lambda_1 \neq 0$) такие что $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$.

Тогда $0 = \overline{0} = \overline{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3} = \overline{\lambda_1} u_1 + \overline{\lambda_2} u_2 + \overline{\lambda_3} u_3$.

Получили $\begin{cases} \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \\ \overline{\lambda_1} u_1 + \overline{\lambda_2} u_2 + \overline{\lambda_3} u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\operatorname{Re}\lambda_1 u_1 + 2\operatorname{Re}\lambda_2 u_2 + 2\operatorname{Re}\lambda_3 u_3 = 0 \\ 2\operatorname{Im}\lambda_1 u_1 + 2\operatorname{Im}\lambda_2 u_2 + 2\operatorname{Im}\lambda_3 u_3 = 0 \end{cases}$

Значит одна из линейных комбинаций с вещественными нетривиальными коэффициентами равна нулю, иначе $\lambda_1 = 0$. Получили противоречие.

7. Так как коэффициенты данного многочлена неотрицательны, то все его корни отрицательны. Пусть его корни $-a_1, -a_2, \ldots -a_n$, где. $a_k > 0$ Тогда $P(x) = (x + a_1)(x + a_2)\ldots(x + a_n)$.

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим получим $2 + a_k = 1 + 1 + a_k \geq 3\sqrt[3]{a_k}$, откуда $P(2) \geq 3^n \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = 3^n$, так как произведение всех корней равно свободному члену многочлена, который равен 1.

8. Умножим данное уравнение на $2f'(x)$ и проинтегрируем. Тогда $\left(f'(x)\right)^2 - \left(f'(0)\right)^2 + \left(f(x)\right)^2 - \left(f(0)\right)^2 = -2\int_0^x t \cdot g(t) \cdot \left(f'(t)\right)^2 dt$.

Левая часть этого равенства отрицательна, поэтому $\left(f(x)\right)^2 \leq \left(f(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^2 \leq \left(f(0)\right)^2 + \left(f'(0)\right)^2$, ч.т.д.

9. Для $x, y, z \in \mathbb{R}$ таки, что $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{cases}$, имеем

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + z^4 = (r^2 - z^2)^2 - \frac{1}{2}(z^2 - r^2)^2 + z^4 = \frac{r^4}{2}.$$

Значит четыре окружности $\begin{cases} x \pm y \pm z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}a^2 \end{cases}$ (с центром в начале координат и радиусом $\sqrt[4]{2}a$) лежат на поверхности $x^4 + y^4 + z^4 = a^4$, $a > 0$.

10. Сначала приведем доказательство для $A = E$ (разумеется, это тоже симметричная положительно определенная матрица). Тогда, можно выбрать базис, состоящий из собственных векторов матрицы B, и в этом базисе матрица B имеет диагональный вид с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ на диагонали. А тогда:

$$\det(E+B) = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)...(1+\lambda_n) > 1+\lambda_1\lambda_2...\lambda_n = \det E + \det B$$

Здесь в представлении определителей мы воспользовались тем, что при переходе от одного базиса к другому определитель матрицы не меняется и равен произведению её собственных чисел, а в неравенстве тем, что все собственные числа положительно определенной матрицы положительны.

Теперь перейдём к общему случаю. Найдём положительно определенную матрицу C такую, что $A = C^2$. Легче всего искать в базисе, состоящем из собственных векторов матрицы A. В этом базисе матрица A диагональная, причем на диагонали стоят её собственные числа, которые, в силу положительной определённости матрицы, положительны. Тогда очевидно, что в качестве C подойдёт матрица, которая в базисе, состоящем из собственных векторов матрицы A диагональная и на диагонали которой будут стоять корни из соответствующих собственных чисел матрицы A. Из положительной определённости следует, что матрица C обратима.

Тогда $A+B = C^2 + B = C(E + C^{-1}BC^{-1})C$, поэтому

$$\det(A+B) = (\det C)^2 \det(E + C^{-1}BC^{-1}) \geq \det C^2 (1 + \det(C^{-1}BC^{-1})) =$$

$$= \det C^2 (1 + \det B / (\det C)^2) = \det C^2 + \det B = \det A + \det B$$

Здесь в неравенстве мы использовали, что, $C^{-1}BC^{-1}$ также положительно определенная матрица, поэтому мы смогли воспользоваться частным случаем теоремы, доказанным в начале.

11. Выясним характер поведения функции.

Если $a < b < 1$, то

$$f(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{b^n} = \frac{a}{b-a}, \quad \int_0^1 f^2(x)dx \leq \left(\frac{a}{b-a}\right)^2$$, то есть интеграл сходится.

Если $b < a < 1$, то

$$x \in \left[b^N, b^{N-1}\right] \to f(x) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{a^n}{b^n} + \sum_{n>N}^{\infty} \frac{a^n}{x} \leq c\left(\frac{a^N}{b^N} + \frac{a^N}{x}\right) \leq c_1 \frac{a^N}{b^N}$$

$$\int_0^1 f^2(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{b^k}^{b^{k-1}} f^2(x)dx \leq c_1 \sum_{k=1}^{\infty} b^k \left(\frac{a}{b}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a}{b^{1-1/2}}\right)^2\right)^k$$, то есть сходится при

$a < b^{1-1/2} = \sqrt{b}$. Расходимость в противном случае- аналогично..

12. Допустим, что такая функция $\overline{F}$ существует. Пусть S - полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0$. Ее границу $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ зададим параметрически

$x=\cos\varphi,\ y=\sin\varphi,\ z=0$. Тогда, т.к. $rot\overline{F}=\overline{0}$ на S, получим нулевой поверхностный интеграл, который можно преобразовать по теореме Стокса:

$$0=\iint_S rot\overline{F}\cdot\overline{n}dS=\int_{\partial S}\overline{F}\,\overline{dr}=\int_0^{2\pi}(-\sin\varphi\overline{i}+\cos\varphi\overline{j})\cdot(-\sin\varphi\overline{i}+\cos\varphi\overline{j})d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\ .$$

Получили противоречие. Следовательно, такой функции не существует.

Результаты олимпиады 2010 года

В олимпиадах приняли участие команды следующих вузов:

- Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики – ИТМО (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет –ГПУ (2 команды),
- Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена – РГПУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет – ГУ(физ) (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет – ГУ(эк) (2 команды),
- Балтийский государственный технический университет «ВоенМех» им. Д.Ф. Устинова – БГТУ (2 команды),
- Военно-космическая академия им. А.Ф.Можайского – ВКА (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технологический университет растительных полимеров - ГТУРП
- Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения – ГУКиТ,
- Военный инженерно-технический университет – ВИТИ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) – ГТИ(ТУ) (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций – ГУВК,
- Северо-западный заочный государственный технический университет –СЗГТУ
- Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет) – ГГИ(ТУ),
- Государственная морская академия им. адм. С.О.Макарова – ГМА,
- Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет – ГАСУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ) – ГЭТУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения – ГУАП,
- Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения - ГУПС
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций – ГУТ,
- Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого – НовГУ,
- Московский государственный институт электронной техники (технический университет) – МИЭТ
- Санкт-Петербургский государственный военно-морской инженерный институт – ВМИИ

Командное первенство

Если от вуза участвовало две команды, то результат второй указан через дробную черту.

Северо-Запад

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ГУ(физ)	104,5	1 (1 ст.)
ИТМО	93,5	2 (2 ст.)
ГПУ	51,5	3 (3 ст.)
ГУ(эк)	37,5	4
МИЭТ	28	5
ГТИ(ТУ)	23	6-7
ВМИИ	23	6-7
ГУВК	17	8
ГУАП	16,5	9
РГПУ	14,5	10
ГЭТУ	14	11-13
ВКА	14	11-13
ГУПС	14	11-13
БГТУ	13	14
ГТУРП	12,5	15
ГМА	12	16
ВИТИ	10	17
НовГУ	7,5	18
ГАСУ	7	19-20
ГГИ	7	19-20
СЗГТУ	4,5	21-22
ГУТ	4,5	21-22
ГУКиТ	1,5	23

Санкт-Петербург

I группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ГУ(физ)	154/95,5	1 (1 ст.)
ИТМО	141/70	2 (1 ст.)
ГПУ	134/64	3 (2 ст.)
РГПУ	30,5	4 (3 ст.)
БГТУ	27,5/15	5
ГЭТУ	15	6

II группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ГУ(эк)	55,5	1 (1 ст.)
ГТИ (ТУ)	38	2 (2 ст.)
ГУВК	32	3 (3 ст.)
ВКА	27	4
ГУАП	22,5	5
ВИТИ	16/14	6
ГАСУ	15,5	7-8
ГУТ	15,5	7-8

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ВМИИ	26	1 (1 ст.)
ГУПС	19	2 (2 ст.)
ГМА	18	3 (2 ст.)
ГТУРП	15,5	4 (3 ст.)
ГУКиТ	15	5
ГГИ	9	6
СЗГТУ	4,5	7

Личное первенство

Северо-Запад

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Василевская Е. С.	ГУ(физ)	42,5	1	1 ст.
Капун Е. Д.	ИТМО	39	2	1 ст.
Пчелин В. А.	ГУ(физ)	33	3	1 ст.
Сандомирский Ф. А.	ГУ(физ)	29	4-5	2 ст.
Дворкин М. Э.	ИТМО	29	4-5	2 ст.
ИсенбаевВ.В.	ИТМО	25,5	6	2 ст.
Викулаев П. С.	ГУ(эк)	23	7	2 ст.
Утесов О. И.	ГПУ	20	8	2 ст.
Быков А. С,	ГПУ	17	9	3 ст.
Сначева А. А,	НовГУ	15	10	3 ст.
Горохова Е. А.	ГУ(эк)	14,5	11-12	3 ст.
Мельников М. А,	ГПУ	14,5	11-12	3 ст.
Бодалев И. С.	ГТИ(ТУ)	13	13	3 ст.
Кочин К. А.	ГУАП	11,5	14	3 ст.
Кизин П. П.	МИЭТ	11	15-16	3 ст.
Петриков А. О.	МИЭТ	11	15-16	3 ст.

Санкт-Петербург

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Василевская Е. С.	ГУ(физ)	42,5	1	1 ст.
Капун Е. Д.	ИТМО	39	2	1 ст.
Кравчук П. А.	ГПУ	38	3	2 ст.
Пчелин В. А.	ГУ(физ)	33	4	3 ст.
Пошакинский А. В.	ГПУ	32	5	3 ст.
Соболев А. И.	ГПУ	30,5	6	3 ст.
Дворкин М.Э.	ИТМО	29	7-8	3 ст.
Сандомирский Ф. А.	ГУ(физ)	29	7-8	3 ст.

II группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Викулаев П.С.	ГУ(эк)	23	1	1 ст.
Горохова Е. А.	ГУ(эк)	14,5	2	2 ст.
Бодалев И. С.	ГТИ(ТУ)	13	3	2ст.
Кочин К. А.	ГУАП	11,5	4	3 ст.
Гурьев Е. С.	ВКА	10,5	5	3 ст.

III группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Сергеев К. Н.	ВМИИ	8,5	1	1 ст.
Исаева М.Ф.	ГУПС	8	2	2 ст.
Яковлев Е. В.	ВМИИ	7,5	3	2 ст.
Та Куанг Йен	ВМИИ	7	4	2 ст.
Кучеренко Е. В.	ГМА	6	5-6	3 ст.
Неплохов Н.А.	ГУПС	6	5-6	3 ст.
Димент А. В.	ГУКиТ	5,5	7	3 ст.
Фомченков Е. В.	ГМА	5	8-11	3 ст.
Зорин И. С.	ГМА	5	8-11	3 ст.
Тесёлкин А. В.	ГУКиТ	5	8-11	3 ст.
Ярков П.А.	ГУПС	5	8-11	3 ст.

Результаты участников, вошедших в командный зачет

Северо-Запад

ГУ(физ)

Василевская Е. С.	42,5
Пчелин В. А.	33
Сандомирский Ф. А.	29

ГГИ

Сидорова Н. П.	4
Филянин К. Г.	2
Киселев Е. А.	1

ИТМО

Капун Е. Д.	39
Дворкин М. Э.	29
Исенбаев В. В.	25,5

ГЭТУ

Захаров А. С.	7
Алексеева Е. С.	5
Кротов С. В.	2

ГПУ

Утесов О. И.	20
Быков А. С.	17
Мельников М. А.	14,5

ВКА

Сахно В. И.	6
Санников А. М.	5
Сахно Д. И.	3

РГПУ

Лашова А. С.	8
Иванушкина Н. В.	5,5
Елисеева З. В,	1

ГУ(эк)

Викулаев П. С.	23
Горохова Е.А.	14,5

ВИТИ

Кулагин В.С.	4
Коныгин И. О.	4
Лукьянченко Н. А.	2

ГМА

Фомченков Е. В.	5
Ефимов В. В.	4

ГУВК

Журавлев А. М.	8
Павлов С. М.	7
Добрынина О. А.	2

ГТИ(ТУ)

Бодалев И.С.	13
Гранкин Д. В.	6
Косарев Д. А.	4

СЗГТУ

Абрамович А. В.	3
Каменкова М.К.	1,5

ГУПС

Исаева М. Ф.	8
Неплохов Н. А.	6

БГТУ

Балясников А. Е.	9
Сайфуллин Т. И.	3
Юсупов М. Р.	1

ГУКиТ

Мовчан Е. Р.	1,5

ГУАП

Кочин К. А,	11,5
Гольверк А. Г.	3
Кочин Д. А.	2

ГАСУ

Ситнинкова А. Ю.	5
Сорокина М. Я.	1
Григорьева А. О.	1

ГТУРП

Курышев А. А..	7,5
Галушко В. А.	3
Коканов В. И.	2

МИЭТ

Петриков А. О.	11
Кизин П. П,	11
Барков И. В.	6

ГУТ

Яковлев Н. А,	2
Еделев С. И.	1,5
Глазков Р. В,	1

НовГУ

Суханова Н. А.	3
Хохловский А. И.	2,5
Залешин М. В.	2

ВМИИ

Сергеев К. И.	8,5
Яковлев Е. В.	7,5
Та Куанг Йен	7

Санкт-Петербург

I группа

ИТМО

Капун Е. Д.	39
Дворкин М. Э.	29
Исенбаев В. В.	25,5
Буздалов М.В.	25,5
Банных А. Г.	22

РГПУ

Лашова А. С.	8
Полякова Л. С,	7,5
Смирнова М. К.	7
Иванушкина Н. В.	5,5
Кузменков П. С.	2,5

ГУ(физ)

Василевская Е. С.	42,5
Пчелин В. А.	33
Сандомирский Ф. А.	29
Смирнов А. Б.	26
Порецкий А. С.	23,5

ГЭТУ

Захаров А. С.	7
Алексеева Е. С.	5
Кротов С. В.	2
Алдонин К. И.	1

ГПУ

Кравчук П. А.	38
Пошакинский А. В.	32
Малышев Е. И.	27
Утесов О. И.	20
Быков А. С.	17

БГТУ

Величко В. Е.	11,5
Балясников А. Е.	9
Сайфуллин Т. И.	3
Никулина Е. С.	2
Косарим И. В.	2

II группа

ГУ(эк)

Викулаев П. С.	23
Горохова Е.А.	14,5
Фадеев Е. С.	11,5
Грибовский А. А.	4
Новиков Ф. В.	2,5

ГУАП

Кочин К. А,	11,5
Петрин Н. А.	4
Гольверк А. Г.	3
Кочин К. А.	2
Кузьмин В. С.	2

ГТИ(ТУ)

Бодалев И.С.	13
Демидов И. В.	9
Гранкин Д. В.	6
Бажукова Г. В.	6
Косарев Д. А.	4

ГАСУ

Данилин А. А.	8
Ситникова А. Ю.	5
Григорьева А. О.	1
Сорокина М. В.	1
Скок Ю. А.	0,5

ВИТИ

Сизов С.В.	7
Баринов А.Ю.	5
Савостицкий Т.А.	3
Пресняков А.А.	1

ГУВК

Павлов Т. В,	12
Журавлев А. М.	8
Павлов С. М.	7
Павлов А. С.	3
Добрынина О. А.	2

ВКА

Гурьев Е. С.	10,5
Сахно В. И.	6
Санников А. М.	5
Сахно Д . И.	3
Есиков Я. Г.	2,5

ГУТ

Закиров А. М.	8
Матыжонок А. Н.	3
Яковлев Н. А,	2
Еделев С. И.	1,5
Глазков Р. В,	1

III группа

ГМА

Фомченков Е. В.	5
Зорин И. С.	5
Рыхманов А. С.	3
Чертилов В. А.	1
Макаров А. М.	1

СЗГТУ

Абрамович А. В.	3
Каменкова М.К.	1,5

ГТУРП

Курышев А. А..	7,5
Теселкин А. В.	5
Галушко В. А.	3
Коканов В. И.	2
Родников А. С.	2

ГУКиТ

Димент А. В,	5,5
Теселкин А. В.	5
Велижанина С. С.	3
Мовчан Е. Р.	1,5

ВМИИ

Сергеев К. И.	8,5
Яковлев Е. В.	7,5
Та Куанг Йен	7
Чу Ты Лам	2
Виндюков Д. Ю.	1

ГУПС

Исаева М. Ф.	8
Неплохов Н. А,	6
Ярков П. А.	5

ГГИ

Сидорова Н. П.	4
Жданов Е. В.	2
Филянин К. Г.	2
Киселев Е. А.	1

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	55,3	83,3	18,5	45,5	46,3	44,6	17	3,8	1,1	7,5	6	5,5

Задачи олимпиады 2009 года

1. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\dots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<2,\ n\geq 2$ *(3 балла)*

2. Доказать, что $\sin x+\arcsin x>2x$ при $x>0.$ *(4 балла)*

3. Доказать, что интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^\alpha\right)}$ не зависит от α. *(4 балла)*

4. Доказать, что все решения уравнения $\left(1+x^2+y^2\right)y'=1$ ограничены на всей оси. *(4 балла)*

5. Существуют ли такие ортогональные матрицы X и Y порядка 3×3, что

$$X^3Y^2X^5Y^7X^4Y^5=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}?$$ *(5 баллов)*

6. Найдите общий вид всех многочленов над □, которые делятся без остатка на сумму своих производных всех порядков. *(6 баллов)*

7. Круг радиуса r катится без скольжения по окружности $x^2+y^2=R^2$ $(R>r)$, оставаясь внутри нее. Траектория некоторой точки M окружности катящегося круга называется гипоциклоидой. Во что превращается гипоциклоида при $r=R/2$? Ответ обосновать. *(6 баллов)*

8. Доказать, что $\int\limits_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx=\int\limits_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx$ при любых $p,q\in$ □. *(6 баллов)*

9. Доказать, что кривая $\vec{r}=\left(t^2-1,\, t^2+2,\, t^3\right)$ - плоская, и найти уравнение плоскости, в которой она лежит. *(8 баллов)*

10. Последовательность задана рекуррентно: $x_1=0,\ x_2=1,\ x_n=(n-1)\left(x_{n-1}+x_{n-2}\right),\ n\geq 3.$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n!}$. *(8 баллов)*

11. Найти все определенные на $(0,\infty)$ дважды дифференцируемые функции f такие, что для любого x: $f'(x)>0$ и $f\left(f'(x)\right)=-f(x)$.

(10 баллов)

12. Известно, что матрицы A,B,C попарно перестановочны. Доказать, что найдутся вещественные числа α,β,γ, не все равные нулю, такие, что $\det\left(\alpha A+\beta B+\gamma C\right)=0$. *(10 баллов)*