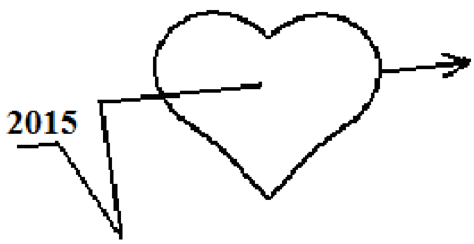
Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики
(Университет ИТМО)

Региональная студенческая математическая олимпиада Санкт-Петербурга 2015 г.



Санкт-Петербург

2015

В 2000-2015 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским национальным исследовательским университетом информационных технологий, механики и оптики (до 2011 года носившем название Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, СПбГУ ИТМО). В 2015 году каждый вуз мог выставить на олимпиаду одну или две команды по 3 человека (в командный зачет входили все участники команды) и студентов в личный зачет. В личном зачете участвовали все заявленные студенты. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две).

Олимпиада проводилась в воскресенье 25 октября 2015 года. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться печатными или электронными справочниками не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач. Каждая задача оценивалась в 10 баллов.

Председателем жюри был профессор В.Д. Лукьянов. В оргкомитет олимпиады входили: ректор Университета ИТМО чл.-корр. РАН Васильев В.Н., проректор по УО и АР проф., д.ф.-м.н. Колесников Ю.Л., руководитель СПИБ Гвоздев С.С., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., доц., к.т.н. Блинова И.В., к.ф.-м.н. Рыжков А.Е., к.ф.-м.н. Трифанова Е.С., к.ф.-м.н. Трифанов А.И.; ст. преп.: Родина Т.В., асс. Попов А.И., асс. Бойцев А.А., вед. инж. Коченюк Т.Г.

Составители: проф.: д.ф.-м.н. Лукьянов В.Д., д.ф.-м.н. Попов И.Ю.; доц.: к.ф.-м.н. Фролов В.М., к.ф.-м.н. Рыжков А.Е., к.ф.-м.н. Трифанова Е.С., к.т.н. Блинова И.В., к.ф.-м.н. Трифанов А.И.; ст. преп.: Родина Т.В., Петтай П.П.; асс. Попов А.И.

Задачи Региональной олимпиады С-Петербурга 2015 г., 25.10.2015

1. Пусть K, L, M и N – некоторые точки R^3. Известно, что $\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}=a,\ \overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{LM}=b$. Найти скалярное произведение $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN}$.

2. Найти все вещественные корни уравнения $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}=0$.

3. Найти все функции $f:R\to R,$ которые при любых действительных x,y удовлетворяют уравнению $f(x)\cdot f(y)-f(xy)=xy+x+y-1.$

4. Решить систему дифференциальных уравнений:
$\frac{dx}{x(z-y)}=\frac{dy}{y(y-x)}=\frac{dz}{y^2-xz}..$

5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi}\frac{\cos^2(x/2)}{3\pi^2+4\pi x-4x^2}dx$.

6. Существует ли бесконечно дифференцируемая функция φ на $(0,\infty)$ такая, что последовательность $\{a_n\}_{n=3}^{\infty}$, определенная рекуррентно $a_{n+1}=\varphi(a_n), a_3>1,$ удовлетворяет следующему условию при любых a_3 :
$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{n\ln n}$ - расходится, $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(a_n)^2}{n\ln n}$ - сходится?

7. Доказать, что $\forall n\in\mathrm{N}$ многочлен $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}$
имеет не более одного действительного корня.

8. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$. Доказать, что $\forall n\in N$ существует точка $x_0\in[0;1]$ такая, что $\int\limits_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}f(x_0)$.

9. Для каких натуральных n ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt[n]{k}]}\frac{1}{k}$ сходится? Здесь [z] обозначает наибольшее целое, меньшее или равное z .

10. На плоскости с декартовыми координатами Oxy найти множество точек, из каждой из которых можно провести ровно три нормали к параболе $y=x^2$.

11. Докажите, что для любой квадратной матрицы A n-ого порядка с вещественными элементами $a_{i,j}$ справедливо неравенство: $\det(nA)^2\le\left(n\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i,j}^2\right)^n$.
Когда достигается равенство?

12. Найти все дважды дифференцируемые функции $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$, удовлетворяющие уравнению $f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)}$, где $a>0$.

Решения задач

1. *Ответ:* $a+b.$

Решение.

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{KM}\cdot\left(\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KL}\right)=\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KL}=$$
$$=\left(\overrightarrow{LM}-\overrightarrow{LK}\right)\cdot\overrightarrow{KN}-\left(\overrightarrow{NM}-\overrightarrow{NK}\right)\cdot\overrightarrow{KL}=$$
$$=\overrightarrow{LM}\cdot\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{KN}-\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{NK}\cdot\overrightarrow{KL}=$$
$$=\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{LM}-\underline{\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{KN}}+\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}+\underline{\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{LK}}=$$
$$=\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KN}\cdot\overrightarrow{LM}=a+b.$$

2. *Ответ.* Вещественных корней нет.
Решение. Очевидно, что ряд сходится абсолютно на всей вещественной оси.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp(\mathrm{i}\,nx)}{n!}=\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\exp(\mathrm{i}\,x))^n}{n!}=\mathrm{Re}\,e^{\exp(\mathrm{i}\,x)}= .$$
$$=\mathrm{Re}\,e^{\cos(x)}e^{\mathrm{i}\sin(x)}=e^{\cos(x)}\cos(\sin(x)).$$

Уравнение $e^{\cos(x)}\cos(\sin(x))=0$ эквивалентно $\sin(x)=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$, однако, последнее уравнение вещественных корней не имеет, ибо $\sin(x)$ на вещественной оси по модулю не превосходит 1.

3. *Ответ:* таких функций не существует.
Решение. Подставляя $x=y=1$ в данное функциональное уравнение, получаем $\left(f(1)\right)^2-f(1)=2$. Это уравнение имеет два действительных корня: $f(1)=2$ или $f(1)=-1$. Полагая в функциональном уравнении $y=1$, получаем $f(x)\cdot f(1)-f(x)=x+x+1-1$ или $f(x)\cdot(f(1)-1)=2x.$ Если $f(1)=2,$ то $f(x)=2x.$ Если $f(1)=-1,$ то $f(x)=-x.$ Проверка показывает, что ни функция $f(x)=2x,$ ни функция $f(x)=-x$ не удовлетворяют данному функциональному уравнению, а, следовательно, это уравнение не имеет решений.
Замечание. Можно рассмотреть $x=y=0$.

4. *Ответ*: $z+x-y=C_1,\ \ln|x|+\frac{z}{y}=C_2$.

Решение. Преобразуем данную систему, воспользовавшись свойством сложения пропорций:

$$\frac{dx}{x(z-y)}=\frac{dy}{y(y-x)}=\frac{dz}{y^2-xz}=\frac{dx-dy+dz}{0}.$$

Отсюда $d(z+x-y)=0$ или

$$z+x-y=C_1, \tag{2}$$

где C_1 – произвольная константа.

Соотношение (2) – первый интеграл системы (1). Для того, чтобы найти ещё один первый интеграл данной системы, преобразуем второе уравнение системы (1):

$y^2(dz-dy)=xydz-xzdy$, $\frac{d(z-y)}{x}=\frac{ydz-zdy}{y^2}$ или в силу (2): $-\frac{dx}{x}=d\left(\frac{z}{y}\right)$.

Отсюда,

$$\ln|x|+\frac{z}{y}=C_2, \qquad (3)$$

где C_2 – произвольная константа.

Очевидно, что первый интеграл (2) и первый интеграл (3) независимы. Следовательно, их система – общий интеграл данной системы дифференциальных уравнений.

5. *Ответ*: $\frac{\ln 3}{8\pi}$.

Решение.

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2(x/2)}{3\pi^2+4\pi x-4x^2}dx=-\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos x}{(x+\pi/2)(x-3\pi/2)}dx=|x=t+\pi/2|=$$

$$=-\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1-\sin t}{(t+\pi)(t-\pi)}dt=-\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dt}{(t+\pi)(t-\pi)}+\frac{1}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin t}{t^2-\pi^2}dt.$$

Поскольку

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{dt}{(t+\pi)(t-\pi)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{t-\pi}-\frac{1}{t+\pi}\right)dt=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{t-\pi}{t+\pi}\right|\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}=-\frac{\ln 3}{\pi},$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin t}{t^2-\pi^2}dt=0,$$

то

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^2(x/2)}{3\pi^2+4\pi x-4x^2}dx=-\frac{1}{8}\left(-\frac{\ln 3}{\pi}\right)=\frac{\ln 3}{8\pi}.$$

6. *Ответ*. Да. Пример**:** $\varphi(x)=1/(\ln\ln(1+\exp\exp(1/x)))$ **.**

Решение. Ясно, что последовательность $b_n=1/\ln\ln n$ обладает нужным свойством. (по интегральному признаку Коши). Построим функцию φ, которая генерирует последовательность с аналогичным поведением с помощью рекуррентного соотношения $a_n=\varphi(a_{n-1}), a_3>1$. Рассмотрим бесконечно дифференцируемую на $(1,\infty)$ функцию $f(x)=1/\ln\ln x$ и функциональное уравнение $\varphi(f(x-1))=f(x)$. Легко видеть, что функция $\varphi=f(T(f^{-1}))$ удовлетворяет этому уравнению. Здесь f^{-1} - это обратная функция к f (она существует из-за монотонности f), T - сдвиг на единицу аргумента функции. Соответственно,

$$\varphi(x)=1/(\ln\ln(1+\exp\exp(1/x))) \text{ .}$$

Рекуррентное соотношение принимает вид $a_n=1/\ln\ln(1+\exp\exp(1/a_{n-1}))$ **.**

Проверим, что это подходящая последовательность.

$$\exp\exp(1/a_n)=1+\exp\exp(1/a_{n-1})=\ldots=n-2+\exp\exp(1/a_3) \text{ .}$$

Это означает, что $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$ для любого a_3. Выбранная функция φ подходит.

7. Решение. Пусть многочлен $P_n(x)$ имеет более одного действительного корня (таких корней многочлен степени n с действительными коэффициентами имеет не более чем n), и пусть x_1 и x_2 – корни многочлена $(x_1 < x_2)$, так что интервал $(x_1;\, x_2)$ не содержит других действительных корней данного многочлена. Отметим, что $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, так как многочлен $P_n(x)$ может иметь лишь отрицательные корни. Поскольку

$P_n'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, то $P_n(x)=P_n'(x)+\dfrac{x^n}{n!}$ и, следовательно, $P_n'(x_1)=-\dfrac{x_1^{\,n}}{n!}$, $P_n'(x_2)=-\dfrac{x_2^{\,n}}{n!}$, а, значит, в точках x_1 и x_2 производная $P_n'(x)$ имеет одинаковые знаки. Тогда в некоторой правой полуокрестности точки x_1 и некоторой левой полуокрестности точки x_2 многочлен $P_n(x)$ будет иметь разные знаки, а, следовательно, существует точка $x_3\in(x_1,\, x_2)$ такая, что $P(x_3)=0.$ Пришли к противоречию. Это значит, что многочлен $P_n(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}$ имеет не более одного действительного корня, что и требовалось доказать.

8. Решение.

$$\int_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f(x)\,dx^{n+1}=\left|\begin{array}{l} x^{n+1}=t, \\ x=\sqrt[n+1]{t}, \\ x=0\Rightarrow t=0, \\ x=1\Rightarrow t=1 \end{array}\right|=\frac{1}{n+1}\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)dt .$$

Так как функция $f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)$ непрерывна как функция t на отрезке $[0;1]$, то согласно теореме о среднем для определённого интеграла существует точка $t_0\in[0;1]$ такая, что

$$\int_0^1 f\left(\sqrt[n+1]{t}\right)dt=f\left(\sqrt[n+1]{t_0}\right).$$

Отсюда $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n dx=\frac{1}{n+1}f(x_0)$, где $x_0=\sqrt[n+1]{t_0}\in[0;1]$, что и требовалось доказать.

9. *Ответ:* Для любых натуральных n.
Решение. Для $n=1$ это известно. Поэтому можно считать, что $n\ge 2$. Обозначим $a_k=(-1)^{[\sqrt[n]{k}]}\dfrac{1}{k}$. Суммы групп последовательных слагаемых одинакового знака обозначим

$$b_K = (-1)^K \sum_{k=K^n}^{(K+1)^n-1} a_k = \sum_{k=K^n}^{(K+1)^n-1} \frac{1}{k}.$$

Покажем, что ряд $\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^K b_K$ сходится по признаку Лейбница и затем докажем из этого сходимость исходного ряда.

Требуется показать, что $b_K \to 0,\ b_K \ge b_{K+1}$. для всех достаточно больших K . Из-за монотонности функции $1/x$ имеем:

$$b_K \le \int_{K^n-1}^{(K+1)^n-2} \frac{1}{x}dx = \ln((K+1)^n-2) - \ln\left(K^n-1\right) = \ln\frac{(K+1)^n-2}{K^n-1} \to 0.$$

Предыдущая оценка для $K+1$ дает

$$b_{K+1} \le \ln\frac{(K+2)^n-2}{(K+1)^n-1}$$

Аналогично находим

$$b_K \ge \int_{K^n}^{(K+1)^n-1} \frac{1}{x}dx = \ln((K+1)^n-1) - \ln\left(K^n\right) = \ln\frac{(K+1)^n-1}{K^n} \ge \ln\frac{(K+2)^n-2}{(K+1)^n-1} \ge b_{K+1}.$$

Это следует из того, что

$$\frac{(K+1)^n-1}{K^n} \ge \frac{(K+2)^n-2}{(K+1)^n-1} \Leftrightarrow ((K+1)^n-1)^2 - K^n((K+2)^n-2) \ge 0.$$

Если $n=2$, то левая часть последнего неравенства равна $2K^2 \ge 0.$ Если $n>2$, то перепишем левую часть неравенства в виде

$$(K+1)^{2n} - 2(K+1)^n + 1 - ((K+1)^2-1)^n + 2K^n \ge$$
$$\ge -2(K+1)^n + 1 + n(K+1)^{2(n-1)} - \ldots - (-1)^n + 2K^n.$$

Последнее выражение положительно при достаточно больших K , поскольку это полином от $(K+1)$ со старшим членом $n(K+1)^{2(n-1)}$. Поэтому при достаточно больших K: $b_K \ge b_{K+1}$ и ряд $\sum(-1)^K b_K$ сходится.

Чтобы показать сходимость исходного ряда, обозначим

$$s_M = \sum_{K=1}^{M}(-1)^K b_K.$$

Фиксируем натуральное m . Тогда для некоторого натурального M имеем: $M^n \le m \le (M+1)^n - 1.$ Если M четно, то $a_k \ge 0$ для всех $k = M^n, \ldots, (M+1)^n - 1$, и имеем

$$s_{M-1}=\sum_{k=1}^{M^n-1}a_k\le\sum_{k=1}^{m}a_k\le\sum_{k=1}^{(M+1)^n-1}a_k=s_M.$$

Если M нечетно, то $a_k\le 0$ для всех $k=M^n,...,(M+1)^n-1$, и имеем противоположное неравенство

$$s_{M-1}=\sum_{k=1}^{M^n-1}a_k\ge\sum_{k=1}^{m}a_k\ge\sum_{k=1}^{(M+1)^n-1}a_k=s_M.$$

Итак, $\sum_{k=1}^{m}a_k$ заключена между s_{M-1} и s_M, где $M\to\infty$ при $m\to\infty$. Тогда

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}a_k=\lim_{M\to\infty}s_M\in R$$

и сходимость ряда доказана.

10. О*твет*: $\left\{(x_0,\,y_0)\middle|\,y_0>1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5;\right\}$.

Решение. Проанализируем, для каких точек сколько нормалей имеется (это больше, чем спрашивается в задаче).

Пусть $L(x_0,\,y_0)$– произвольная точка плоскости, а $M(x,\,y)$– произвольная точка параболы (рис.1). За вектор нормали к параболе в точке $M(x,\,y)$ можно взять вектор $\vec{n}=(2x,\,-1)$. Вектор $\overrightarrow{LM}=(x-x_0,\,y-y_0)$ является вектором нормали к параболе в точке $M(x,\,y)$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{n}=(2x,-1)$ и $\overrightarrow{LM}=(x-x_0,\,y-y_0)$ коллинеарны, то есть если выполнено $\frac{x-x_0}{2x}=\frac{y-y_0}{-1}$ или

$2x(y-y_0)+x-x_0=0$. (1)

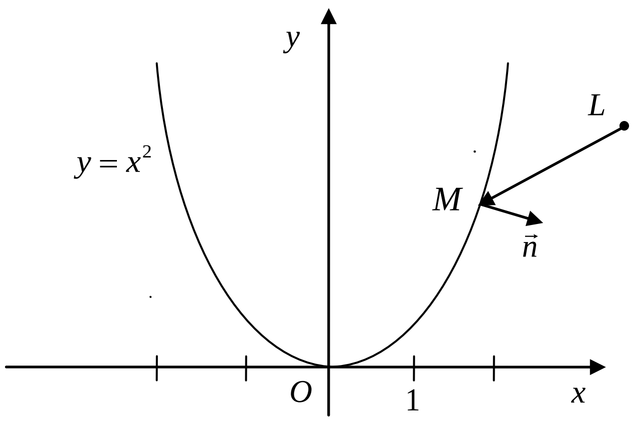


Рис. 1

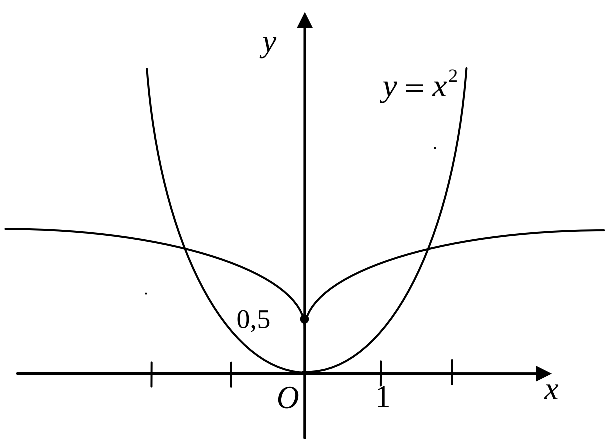


Рис. 2

Подставляя $y=x^2$ в уравнение (1), получаем

$$2x^3+(1-2y_0)x-x_0=0. \qquad (2)$$

Таким образом, требуется найти множество точек $L(x_0,\,y_0)$, для которых уравнение (2) имеет ровно три различных вещественных корня.

Если $x_0=0$, то уравнение (2) имеет ровно три различных вещественных корня при $y_0>0{,}5$ и один вещественный корень при $y_0\le 0{,}5$ (при $y_0=0{,}5$ корень $x=0$ кратный).

Пусть $x_0>0$.

Рассмотрим функцию $f(x)=2x^3+(1-2y_0)x-x_0$. Тогда

$$f'(x)=6x^2+(1-2y_0).$$

Если $y_0\le 0{,}5$, то $f'(x)>0\ \ \forall x\in(-\infty,+\infty)$ за исключением $x=0$ при $y_0=0{,}5$. Тогда функция $f(x)$ строго возрастает на всей числовой оси и поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, то при $y_0\le 0{,}5$ и произвольном $x_0>0$ уравнение (2) имеет один вещественный корень.

Если $y_0>0{,}5$, то производная $f'(x)$ имеет два вещественных корня:

$$x_1=-\sqrt{(2y_0-1)/6}\ \text{ и }\ x_2=+\sqrt{(2y_0-1)/6}.$$

В точке x_2 функция $f(x)$ имеет минимум, причем

$f(x_2)=-4\left(\sqrt{(2y_0-1)/6}\right)^3-x_0<0$.

В точке x_1 функция $f(x)$ имеет максимум: $f(x_1)=4\left(\sqrt{(2y_0-1)/6}\right)^3-x_0$.

Ясно, что уравнение (2) имеет ровно три различных вещественных корня тогда и только тогда, когда

$$f(x_1)>0,\ \text{то есть}\ 4\left(\sqrt{(2y_0-1)/6}\right)^3-x_0>0,\ \text{или}\ y_0>1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5.$$

Если $f(x_1)<0$, то есть $4\left(\sqrt{(2y_0-1)/6}\right)^3-x_0<0$, или $y_0<1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5$, то уравнение имеет один вещественный корень, а если $f(x_1)=0$, то есть $4\left(\sqrt{(2y_0-1)/6}\right)^3-x_0=0$, или $y_0=1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5$, то имеет ровно два различных вещественных корня.

Поскольку парабола $y=x^2$ симметрична относительно оси Oy, то для $x_0<0$ получаются те же выводы, что и для $x_0>0$.

Таким образом, в точке $(x_0,\,y_0)$ к параболе $y=x^2$ можно провести:

1) ровно три нормали тогда и только тогда, когда координаты точки удовлетворяют неравенствам

$$y_0>1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5,;$$

2) ровно две нормали тогда и только тогда, когда координаты точки удовлетворяют равенствам

$$y_0=1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5,\ x_0\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,+\infty).$$

3) ровно одну нормаль тогда и только тогда, когда координаты точки удовлетворяют неравенствам

$$y_0 < 1{,}5\cdot\sqrt[3]{0{,}5x_0^2}+0{,}5, \text{ или } x_0=0;\ y_0=0{,}5 \text{ (рис.2).}$$

11. Решение:

$$\det(nA)^2 = n^{2n}\det(\mathrm{A})^2 \le n^{2n}\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2 \le n^{2n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2\right)^n = \left(n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2\right)^n.$$

При первом оценивании мы воспользовались неравенством Адамара $|\det A| \le \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$, которое имеет прозрачный геометрический смысл: модуль определителя матрицы равен объёму n-мерного косоугольного параллелепипеда, построенного на векторах-строках матрицы, а выражение, стоящее справа – произведение длин соответствующих векторов (рёбер параллелепипеда). Здесь равенство достигается, когда соответствующие векторы ортогональны. Во втором оценивании мы воспользовались неравенством между средним геометрическим и средним арифметическим $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$, в котором равенство достигается при равенстве всех неотрицательных элементов a_i, роль которых у нас играет $\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}^2$. Таким образом, доказываемое неравенство обращается в равенство лишь в том случае, когда все векторы-строки матрицы A попарно ортогональны и имеют одинаковую длину, т.е. являются образующими n-мерного куба (рёбрами, инцидентными одной из вершин куба).

12. *Ответ:* $f(x)=\dfrac{x^C}{\sqrt{Ca^{C-1}}}$, $C>0$.

Решение. Данное уравнение

$$f'\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{x}{f(x)} \qquad (1)$$

можно переписать в виде

$$f'(x)=\frac{a}{xf\left(\frac{a}{x}\right)}, \qquad (2)$$

откуда следует, что

$$xf\left(\frac{a}{x}\right)=\frac{a}{f'(x)}. \qquad (3)$$

Продифференцируем обе части уравнения (2) по x:

$$f''(x)=-\frac{a}{\left(xf\left(\frac{a}{x}\right)\right)^2}\left(f\left(\frac{a}{x}\right)-\frac{a}{x}f'\left(\frac{a}{x}\right)\right). \qquad (4)$$

С учётом (1) и (3) уравнение (4) можно преобразовать к виду

$$xf''(x) = -f'(x) + \frac{x\left(f'(x)\right)^2}{f(x)} \text{ или } x\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Интегрируя, получаем $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{C_1}{x}$, откуда $\ln f(x) = C_1 \ln x + \ln C_2$ или

$$f(x) = C_2 x^{C_1}. \qquad (5)$$

Так как из условия задачи следует, что $f(x) > 0$ и $f'(x) > 0$, то $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$.

Подставим (5) в исходное уравнение. В результате получим $C_1 C_2 \frac{a^{C_1 - 1}}{x^{C_1 - 1}} = \frac{x}{C_2 x^{C_1}}$.

Отсюда $C_2 = \frac{1}{\sqrt{C_1 a^{C_1 - 1}}}$. Таким образом, все функции, удовлетворяющие условиям задачи, могут быть записаны в виде $f(x) = \frac{x^C}{\sqrt{C a^{C-1}}}$, где $C > 0$.

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на 10 (стоимость задачи)).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	52,6	9,3	28,5	4,9	29,8	3,1	11,1	17,3	8,2	16,4	3,8	8,4

В олимпиаде приняли участие

Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО)
Санкт-Петербургский государственный экономический университет (СПБГЭУ)
Военная академия связи имени С.М. Буденного (ВАС)
Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) (СПбГТИ)
Государственный университет морского и речного флота им. адм. С.О. Макарова (ГУМРФ)
Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского (ВКА)
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (ВШЭ)
Военная академия материально-технического обеспечения имени А. В. Хрулева (ВАМТО)
Военный институт (инженерно-технический) (ВИИТ)
Санкт-Петербургский государственный университет: математико-механический факультет(СПбГУ М), физический факультет (СПбГУ Ф), институт наук о Земле (СПбГУ З), экономический факультет (СПбГУ Э), факультет прикладной математики – процессов управления (СПБГУ ПМ)
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (ГАСУ)
Балтийский государственный технический университет "Военмех" им. Д.Ф. Устинова (БГТУ)
Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения (КиТ)
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ имени В.И.Ульянова (Ленина)"
Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена (РГПУ)

Результаты в командном зачете:

I группа	II группа	III группа
1. ИТМО – 238/153 **2. СПбГУ – 194/58** **3. РГПУ - 64**	1. **БГТУ – 90/10** **2. ВКА – 78/52** 3. **ЛЭТИ – 71/29** 4. ГАСУ – 33 5. СПБГТИ (ТУ) – 28 6. ГУМРФ – 15/6	**1. ВИ (ИТ) – 55/31** 2. **СПбГЭУ – 45** 3. **ВАС – 36/9** 4. **ВШЭ – 35** 5. Горный – 34 6. КиТ – 5/1 7. ВАМТО – 2/0

Результаты участников, вошедших в командный зачет

I группа

ИТМО

Короткевич Г.В.	82
Смыкалов В.П.	73
Васильев А.Т.	83

СПбГУ

Александров И.А.	68
Иевлев Е.А.	72
Космаков М.А.	54

РГПУ

Парамонов А.В.	53
Кондратьев В.В	11

II группа

БГТУ

Хакимов А.А.	27
Симатов Д.С.	46
Петров И.В.	17

ВКА

Умаров А.Б.	38
Семченков Д.А.	19
Зюльковский А.А.	21

ЛЭТИ

Филатов Ан.Ю.	31
Филатов Ар.Ю.	40

ГАСУ

Бакусов П.А.	11
Ковалева П.А.	22

СПбГТИ(ТУ)

Большунова Е.А.	11
Торлопов И.И.	11
Камаев А.В.	6

ГУМРФ

Жуйкова Е.Г.	14
Воронина А.А.	1

III группа

ВИ(ИТ)

Гаврилов П.О.	40
Стрельников Е.М.	15

СПбГЭУ

Соболева С.А.	2
Туркин О.Ф.	14
Черепова К.Д.	29

ВАС

Шумков А.А.	14
Носов М.М.	10
Черепанов А.А.	12

ВШЭ

Бердюженко Д.А.	20
Киреева П.С.	15

Горный

Пурэвхуу С.	3
Хисматуллин Т.С.	17
Сайфуллин Р.И.	14

КиТ

Филиппова Е.М.	1
Волкова К.В.	4

ВАМТО

Евсеев И.А.	2

Личное первенство

I группа

Участник	вуз	Кол-во баллов	Место в группе	Диплом
Васильев Артем Тарасович	ИТМО	83	1	1 ст.
Короткевич Геннадий Владимирович	ИТМО	82	2	1 ст.
Смыкалов Владимир Павлович	ИТМО	73	3-4	1 ст.
Латышев Алексей Сергеевич	ИТМО	73	3-4	1 ст.
Иевлев Евгений Альбертович	СПбГУ	72	5	1 ст.
Александров Иван Александрович	СПбГУ	68	6	1 ст.
Боровков Данила Викторович	СПбГУ	58	7	2 ст.
Александров Юрий Аркадьевич	ИТМО	55	8	2 ст.
Космаков Максим Алексеевич	СПбГУ	54	9	2 ст.
Парамонов Арсений Васильевич	РГПУ	53	10-11	2 ст.
Збань Илья Константинович	ИТМО	53	10-11	2 ст.
Якутов Дмитрий Алексеевич	ИТМО	42	12	3 ст.
Воробьев Алексей Михайлович	ИТМО	39	13	3 ст.
Исомуродов Жавлон Эркин Угли	ИТМО	38	14	3 ст.

II группа

Участник	вуз	Кол-во баллов	Место в группе	Диплом
Симатов Дмитрий Сергеевич	ВоенМех	46	1	1 ст.
Филатов Артем Юрьевич	ЛЭТИ	40	2	1 ст.
Умаров Александр Бахтиёрович	ВКА им. А.Ф.Можайского	38	3	1 ст.
Филатов Антон Юрьевич	ЛЭТИ	31	4	2 ст.
Хакимов Андрей Айратович	ВоенМех	27	5	2 ст.
Багриновцев Александр Юрьевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	22	6-7	3 ст.
Ковалева Полина Андреевна	ГАСУ	22	6-7	3 ст.
Зюльковский Александр Анатольевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	21	8	3 ст.
Кабиров Руслан Дамирович	ВКА им. А.Ф.Можайского	20	9-10	3 ст.
Носова Ольга Андреевна	ЛЭТИ	20	9-10	3 ст.

III группа

Участник	вуз	Кол-во баллов	Место в группе	Диплом
Гаврилов Павел Олегович	ВИИТ	40	1	1 ст.
Бахтин Максим Алексеевич	НИУ ВШЭ	29	2-3	2 ст.
Черепова Кристина Дмитриевна	СПбГЭУ	29	2-3	2 ст.
Бердюженко Дарья Александровна	НИУ ВШЭ	20	4-5	2 ст.
То Дык Зуй	ВАС	20	4-5	2 ст.
Хисматуллин Тимур Салаватович	Горный	17	6	3 ст.
Стрельников Егор Михайлович	ВИИТ	15	7-9	3 ст.
Киреева Полина Сергеевна	НИУ ВШЭ	15	7-9	3 ст.
Дао Зуй Сон	ВАС	15	7-9	3 ст.

Ранжированный список участников студенческой математической олимпиады Санкт-Петербурга по математике 2014 года.

ФИО	ВУЗ	Вес задачи / номер задачи												Сумма бал-лов	Место
		10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
Васильев Артем Тарасович	ИТМО	10	10	10	3	10	10	10	10	0	10	0	0	83	1
Короткевич Геннадий Владимирович	ИТМО	10	10	10	3	10	0	10	10	9	10	0	0	82	2
Смыкалов Владимир Павлович	ИТМО	7	10	10	0	0	0	10	10	7	9	0	10	73	3
Латышев Алексей Сергеевич	ИТМО	10	10	10	4	9	0	10	10	0	10	0	0	73	3
Иевлев Евгений Альбертович	СПбГУ	10	10	6	3	10	0	2	10	0	5	7	9	72	5
Александров Иван Александрович	СПбГУ	10	0	10	0	10	0	1	10	7	10	0	10	68	6
Боровков Данила Викторович	СПбГУ	10	0	10	3	10	0	10	0	6	9	0	0	58	7
Александров Юрий Аркадьевич	ИТМО	8	0	10	0	5	0	1	10	8	10	0	3	55	8
Космаков Максим Алексеевич	СПбГУ	10	0	10	0	10	0	10	10	0	4	0	0	54	9
Парамонов Арсений Васильевич	РГПУ	10	0	10	2	1	0	10	10	0	10	0	0	53	10
Збань Илья Константинович	ИТМО	10	10	10	0	8	0	0	0	5	10	0	0	53	10

Симатов Дмитрий Сергеевич	Военмех	10	0	4	0	10	0	10	10	0	2	0	0	46	12
Якутов Дмитрий Алексеевич	ИТМО	10	0	10	3	1	0	3	0	0	5	10	0	42	13
Гаврилов Павел Олегович	ВИИТ	10	0	10	10	0	0	0	0	0	0	0	10	40	14
Филатов Артем Юрьевич	ЛЭТИ	10	0	10	0	7	0	0	10	2	0	0	1	40	14
Воробьев Алексей Михайлович	ИТМО	4	0	10	0	7	0	0	8	0	10	0	0	39	16
Умаров Александр Бахтиёрович	ВКА им. А.Ф.Можайского	0	0	10	0	9	0	2	8	0	1	0	8	38	17
Исомуродов Жавлон Эркин Угли	ИТМО	10	0	10	0	1	0	0	0	4	10	0	3	38	17
Белоногов Иван Константинович	ИТМО	4	0	10	0	9	0	0	10	0	2	0	0	35	19
Филатов Антон Юрьевич	ЛЭТИ	10	1	3	0	10	5	0	0	2	0	0	0	31	20
Черепова Кристина Дмитриевна	СПбГЭУ	10	0	10	0	9	0	0	0	0	0	0	0	29	21
Хакимов Андрей Айратович	Военмех	10	10	0	0	4	0	1	0	2	0	0	0	27	22
Багриновцев Александр Юрьевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	10	0	10	0	0	0	0	0	0	2	0	0	22	23
Ковалева Полина Андреевна	ГАСУ	10	0	0	0	3	0	0	0	0	6	0	3	22	23
Зюльковский Александр Анатольевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	0	0	10	0	10	0	1	0	0	0	0	0	21	25
То Дык Зуй	ВАС	10	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	20	26
Кабиров Руслан Дамирович	ВКА им. А.Ф.Можайского	10	0	0	0	10	0	0	0	0	0	0	0	20	26
Носова Ольга Андреевна	ЛЭТИ	0	0	10	0	10	0	0	0	0	0	0	0	20	26
Бахтин Максим Алексеевич	НИУ ВШЭ	10	0	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	26
Бердюженко Дарья Александровна	НИУ ВШЭ	10	0	5	0	0	0	0	2	2	0	0	1	20	26

Семченков Даниил Андреевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	10	0	3	0	6	0	0	0	0	0	0	0	19	31
Петров Иван Владимирович	ВоенМех	0	10	6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	17	32
Хисматуллин Тимур Салаватович	Горный	10	0	5	2	0	0	0	0	0	0	0	0	17	32
Дао Зуй Сон	ВАС	10	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	15	34
Стрельников Егор Михайлович	ВИИТ	10	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	15	34
Конорев Максим Игоревич	ГУМРФ	8	0	0	0	5	0	0	0	2	0	0	0	15	34
Киреева Полина Сергеевна	НИУ ВШЭ	10	0	0	0	4	0	1	0	0	0	0	0	15	34
Арзуманян Наринэ Карапетовна	СПбГУ	0	0	0	0	5	0	0	10	0	0	0	0	15	34
Шумков Алексей Анатольевич	ВАС	10	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	14	39
Сайфуллин Ринат Ильфатович	Горный	10	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	14	39
Жуйкова Екатерина Георгиевна	ГУМРФ	10	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	14	39
Туркин Олег Федорович	СПбГЭУ	10	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	14	39
Черепанов Андрей Александрович	ВАС	10	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	12	43
Доминич Артем Сергеевич	ВИИТ	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	11	44
Петров Кирилл Алексеевич	ВИИТ	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	11	44
Бакусов Павел Анатольевич	ГАСУ	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	11	44
Кондратьев Владимир Владимирович	РГПУ	10	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	11	44
Большунова Екатерина Андреевна	СПбГТИ	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	11	44
Смоловик Станислав Викторович	ГУМРФ	10	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	11	44
Торлопов Иван Игоревич	СПбГТИ	1	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	2	11	44
Носов Максим Михайлович	ВАС	5	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	10	51

Ржепецкий Александр Михайлович	ВИИТ	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Поникаров-ский Евгений Алексеевич	ВИИТ	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Аверьянов Григорий Владимиво-рич	ВИИТ	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Воробьев Ев-гений Влади-славович	ВКА им. А.Ф.М ожай-ского	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Антонов Ан-тон Владими-рович	ВКА им. А.Ф.М ожай-ского	7	0	0	0	1	0	0	0	0	2	0	0	10	51
Богданюк Да-ниил Олего-вич	Воен-Мех	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Ласточкин Никита Анд-реевич	ЛЭТИ	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Карманов Александр Андреевич	СПбГТ И	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Уткин Влади-слав Виталь-евич	СПбГ У	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	51
Левицкий Да-ниил Влади-мирович	ЛЭТИ	1	0	6	0	2	0	0	0	0	0	0	0	9	61
Камаев Алек-сандр Ва-сильевич	СПбГТ И	0	0	0	0	2	0	0	3	0	1	0	0	6	62
Павельева Юлия Нико-лаевна	СПбГ У	0	0	5	0	1	0	0	0	0	0	0	0	6	62
Батсух Ту-мэннасан	ВАС	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	5	64
Каленский Константин Николаевич	ВАС	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5	64
Сивицкая Яна Владиславов-на	ГУМР Ф	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5	64
Гулык Алек-сандр Ген-надьевич	ГУМР Ф	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	4	67
Волкова Ксе-ния Викто-ровна	ИКИТ	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	67
Снятков Мак-сим Алексан-дрович	ВАС	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	69
Зеленкевич Виктория Вя-чеславовна	ВАС	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	69

Тимофеев Данил Игоре-вич	ВАС	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	69
Пурэвхуу Сэр-гэлэн	Гор-ный	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	69
Нуриев Рама-зан Айдыно-вич	ГУМР Ф	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	69
Евсеев Илья Андреевич	ВА МТО	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2	74
Гулыга Вла-димир Дмит-риевич	ВИИТ	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	74
Манасра Ис-маил Файсал	ВИИТ	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2	74
Кирсанов Олег Евгень-евич	Воен-Мех	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	74
Соболева Софья Анд-реевна	СПбГ ЭУ	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	74
Подойницына Елизавета Александров-на	ВАС	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Бочарникова Екатерина Ивановна	ВАС	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Андреев Александр Игоревич	ВИИТ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Андреев Ки-рилл Игоре-вич	ВИИТ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Воронина Анастасия Андреевна	ГУМР Ф	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Шошин Артур Романович	ГУМР Ф	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Филиппова Екатерина Михайлова	ИКИТ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Цветкова Татьяна Сер-геевна	ИКИТ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Вахрамеев Климентий Викторович	НИУ ВШЭ	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	79
Лозина Поли-на Сергеевна	СПбГ У	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	79
Данилин Анд-рей Романо-вич	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Калин Яро-слав Сергее-вич	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Анищенко Алексей Ва-сильевич	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Ивенский Сергей Сер-	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89

геевич															
Куценко Сергей Владимирович	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Тугушев Наиль Равильевич	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Бучнев Иван Андреевич	ВА МТО	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Саляхова Алия Маратовна	ВАС	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Смирнова Анастасия Александровна	ВАС	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Перетрутова Анастасия Александровна	ВАС	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Берестовой Максим Андреевич.	ВАС	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Панков Максим Владимирович	ВИИТ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Путилин Илья Алексеевич	ВИИТ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Волков Сергей Алексеевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Селезнев Александр Андреевич	ВКА им. А.Ф.Можайского	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Граунов Игорь Олегович	ВоенМех	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Дейнекин Святослав Сергеевич	ВоенМех	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Вокуев Дмитрий Романович	ГАСУ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Кузнецов Валентин Вадимович	Горный	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Румянцев Александр Сохрабович	ГУМРФ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Поддубная Евгения Владимировна	ГУМРФ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Гайс Роман Александрович	ГУМРФ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89

Буракова Мария Евгеньевна	ГУМРФ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Борискина Мария Александровна	ИКИТ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Исиченко Олеся Константиновна	ИКИТ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Семенов Вадим Павлович	ИТМО													0	89
Пивторак Юрий Владимирович	НИУ ВШЭ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Жуган Иван Евгеньевич	НИУ ВШЭ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Русанов Алексей Сергеевич	РГПУ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Вишневская Анастасия Викторовна	РГПУ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Карманов Дмитрий Дмитриевич	СПбГУ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89
Мандрусова Зоя Всеволодовна	СПбГУ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	89