

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТА СОСУЛЬКИ

Е.В. Александров

aloraman@mail.ru

Рассматривается процесс геометрического моделирования сосульки, с расчетом на использование в компьютерной графике. Получен метод построения геометрической модели на основе модифицированного полуэмпирического подхода Зилдера-Лозовского. Воспроизведен процесс волнообразования на поверхности. Результат может быть использован для получения визуально-достоверных геометрических каркасов сосулек в компьютерной графике.

**Ключевые слова:** клеточный автомат, сосулька, физически-ориентированное моделирование.

### 1. Введение

На данный момент не существует точных аналитических моделей для описания роста сосульки, так как этот процесс является сложной комбинацией процессов фазовых переходов вода-лед, вода-пар, теплопередачи, движения по поверхности переменной формы. Полностью рассчитать все эти процессы пока не представляется возможным – поэтому рассматриваются различные упрощения и приближения, позволяющие получать довольно точные аналитические решения или оценки каких-то параметров. К сожалению, данные приближения, как правило, снижают графическую детализацию получаемой сосульки до минимума, не позволяя использовать ее в графике. Поэтому в компьютерной графике используются эмпирические методы построения моделей, не позволяющие производить физические расчеты, но позволяющие получать визуально достоверные каркасы объектов и/или различные текстурные карты.

Можно выделить три типа методов графического моделирования: чисто-эмпирические, морфологические и структурные [6]. К чисто-эмпирическим относят различные методы прямого оцифровывания формы реальной сосульки с помощью анализа фотографий и сканирования; данные методы хороши получаемыми визуальными характеристиками, но имеют практически нулевую гибкость. К морфологическим относят различные методы построения сосульки на основе набора некоторых геометрических примитивов, в частности – метасфер [2]. К структурным относятся методы, основанные на заданной изначально структуре объекта и наборе параметризованных процессов изменения данной структуры. В случае, когда процессы изменения строятся на основе адекватных ситуации физических законов и явлений, такой подход называется физически-ориентированным моделированием. Идея Зилдера-Лозовского заключается в представлении сосульки в виде аналога клеточного автомата: место локализации сосульки разбивается на ячейки, каждая ячейка может быть пустой, заполненной водой или же льдом. Рост сосульки происходит за счет процессов случайного замораживания, случайного блуждания воды между ячейками и регулирования количества воды в месте локализации сосульки.

### 2. Модель

Исходная модель Зилдера-Лозовского [1] являлась по сути вариантом обобщения алгоритма DLA [3] (diffusion-limited aggregation), соответствующему росту, ограниченному диффузией – то есть при недостатке воды, на трехмерный случай. Данный метод можно модифицировать для промежуточной ситуации между ростом, ограниченным диффузией и ростом, ограниченным кинетикой (когда рост зависит в целом от скорости замораживания воды). Предлагается рассматривать не блуждание одиночных капель на относительно сухой поверхности сосульки, а полноценное смачивание поверхности сосульки. Полноценный рост, ограниченный кинетикой происходит при погружении в объем переохлажденной жидкости, в то время как рассматриваемый процесс происходит при наличии всего лишь

тонкого слоя покрывающей жидкости, поэтому ячейки могут содержать воду только в том случае, если они находятся на расстоянии, не превышающем параметр SP, от ледяной ячейки. В случае превышения данного значения считается, что возникающее натяжение слишком высоко для удержания воды и происходит образование капли, удаляющей воду с поверхности сосульки. Откуда и берется название параметра SP – shedding parameter (параметр скапывания). В модели Зилдера-Лозовского [1] имелся аналогичный параметр, отвечающий за ограничение времени нахождения воды на кончике сосульки. Процесс роста представляет собой итерацию, за каждый кадр которой проходят фазы блуждания, замораживания и регуляции количества воды.

За каждый итерационный проход каждая капля воды может переместиться в одну из 6 соседних ячеек с помощью случайного блуждания. Переходы в горизонтальном направлении и переход вверх в модели считаются равновероятными, переход вниз – более вероятным. Соотношение этих вероятностей определяется параметром движения (motion parameter) – MP. Соответствующие вероятности перехода:

$$P_{u/h} = \frac{1}{MP + 5} \quad P_d = \frac{MP}{MP + 5}$$

Если считать что до текущего состояния частица двигалась вместе с потоком жидкости, то MP показывает соотношение стремления воды продолжить движение по инерции к препятствованию этому движению, то есть фактически MP связан с числом Рейнольдса для соответствующего потока. На переход накладывается несколько ограничений: ячейка, в которую совершается переход, должна быть, нельзя превысить при этом ограничение на SP. В случае полноценного покрытия ледяной поверхности водным слоем блуждания как такового практически не происходит – так как практически отсутствуют вакантные места, а синхронное перемещение всех ячеек за кадр итерационного прохода приводит к ситуации, полностью аналогичной добавлению воды на кончик сосульки – то есть можно сказать, что течение ламинарное. В реальности на гладкой боковой поверхности сосульки действительно наблюдается ламинарное течение воды. Турбулентное же течение, равно как и блуждание в модели, наблюдается на выступках на поверхности и на кончике сосульки. [5]

За каждый итерационный проход каждая ячейка в водном состоянии может перейти в ледяное состояние с вероятностью, определяемой параметром вероятности замораживания (freezing probability) – FP. Каждая капля, подвергшаяся процессу заморозки, перемещается в пределах области, радиус которой ограничивается параметром радиуса замораживания (freezing range) – FR, в то положение, в котором у нее будет больше всего соседей в ледяном состоянии. Такой процесс замораживания связан с процессом нуклеации [4] – случайным образованием внутри слоя переохлажденной жидкости ледяного кластера. Появление такого кластера вызовет изменение свободной энергии:

$$\Delta F_r = -\Delta F_v \frac{4}{3} \pi r^3 + \sigma 4\pi r^2$$

Где  $\Delta F_v$  -изменение свободной энергии на единицу объема, связанного с изменением,  $\sigma$  – поверхностное натяжение. Для переохлажденной жидкости можно записать  $\Delta F_v \approx L\Delta T/T_M$ , где  $\Delta T$  - переохлаждение,  $T_M$  - температура плавления,  $L$  - скрытая теплота.

На представленном графике (рис.1) показано, как изменяется полная свободная энергия кластера в зависимости от его размера. При размере кластера ниже некоторого критического радиуса, новообразованный кластер может уменьшить свою свободную энергию, уменьшившись в размерах. При больших значениях – образовать устойчивую ледяную структуру и привести к росту новой фазы. Значение критического радиуса можно определить из следующего соотношения:

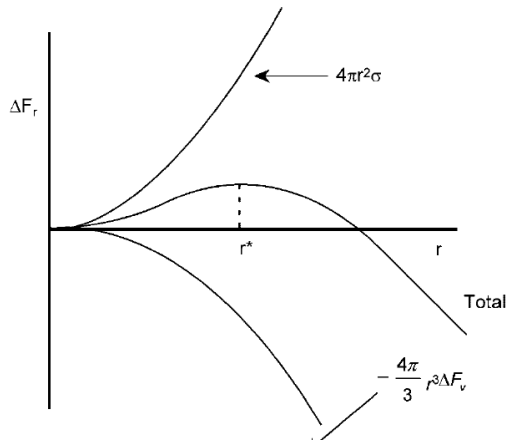


Рис. 1 Изменение свободной энергии в зависимости от радиуса кластера

$$\frac{\partial \Delta F_r}{\partial r} = 0 = -4\pi r^2 \Delta F_v + 8\pi r \sigma$$

Откуда критический радиус:

$$r^* = \frac{2\sigma}{\Delta F_v} = \frac{2\sigma T_M}{L\Delta T}$$

Вероятность нахождения флуктуации энергии  $W$  определяется фактором Больцмана  $\exp(-W/kT)$ , количество свободной энергии, необходимой для формирования кластера критического радиуса:

$$\Delta F_{r^*} = \frac{16}{3} \frac{\pi \sigma^3}{(\Delta F_v)^2}$$

Так как рост, ограниченный теплопередачей (heat-limited growth) в данной модели не рассматривается, то все увеличения свободной энергии, связанной с образованием данных кластеров, должны быть скомпенсированы уменьшением свободной энергии за счет занятия вакантных мест в решетке, в которых больше половины соседей уже заморожены, то есть занятие которых приводит к уменьшению количества свободных связей. Параметр FR обеспечивает это, FR же фактически отвечает за шанс образования критического кластера, соразмерного с размерами ячейки.

В случае рассмотрения роста, ограниченного теплопередачей, необходимо добавить флуктуацию ячеек из состояния воды в лед и обратно, в случае если они занимают сайты излома (kink sites) [4] – такие места в решетке, в которых замороженными является ровно половина соседей – таким образом, изменение их состояния не приводит к изменению количества свободных связей.

### 3. Анализ работы модели

Результатом работы алгоритма является набор состояний автомата на последнем итерационном шаге. В рабочем пространстве находится сама сосулька, покрытая слоем воды, в котором находятся зародыши ледяных образований. Для снятия результатов и их анализа необходимо перевести избавиться от частей, связанных с процессом роста. Можно выполнить тремя путями:

- Остановить водоснабжение - продолжить процесс работы алгоритма с выключенными механизмами добавления воды.
- Произвести процесс ударного замораживания – перевести все водяные ячейки в ледяное состояние.

- Изъять сосульку – под напором сухого воздуха снять с поверхности водяной слой и убрать водоснабжение. Фактически – выделить главную связную часть множества ледяных ячеек из клеточного автомата.

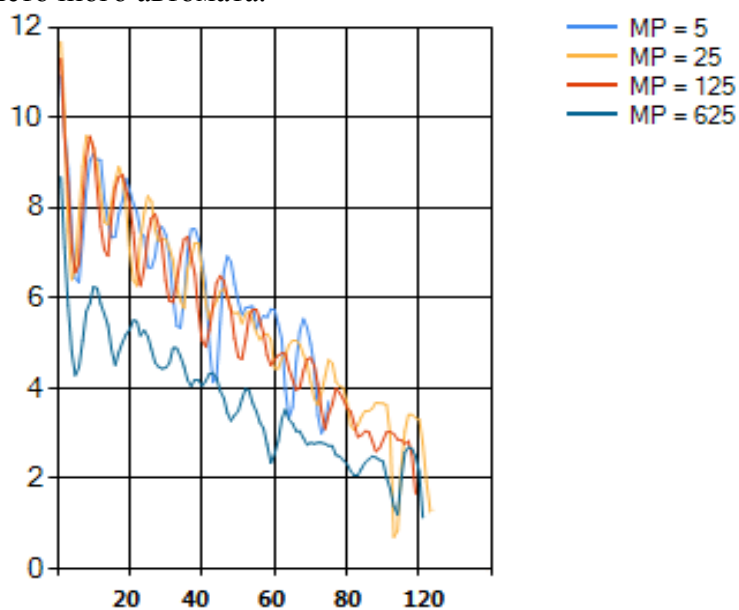


Рис. 2 Профили сосульки при различных  $MP$

Предполагается использовать третий вариант, как сохраняющий высокую степень графической детализации. Далее алгоритм действует из предположения, что не происходит процесс ветвления сосульки. Трехмерный массив заполнения разделяется на горизонтальные слои. На каждом горизонтальном слое происходит выделение связанных областей простейшим рекурсивным методом. Для каждой связной области вычисляются координаты ее центра, а затем из всех областей на слое оставляется только та, чей центр расположен ближе всего к центру верхнего слоя. Для самого верхнего слоя оставляется та область, центр которой ближе к исходному расположению зародыша сосульки.

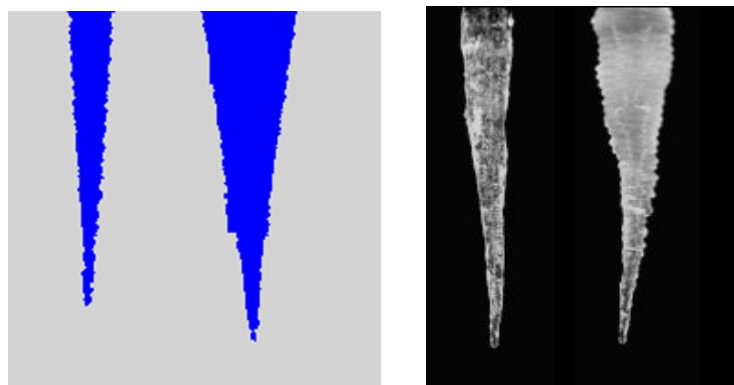
Тело сосульки собирается вертикальным проходом по массиву из оставшихся областей, начиная сверху и останавливая процесс сборки, если следующий слой не соединен с предыдущим. Номер последнего слоя определяет высоту сосульки.

Параметр  $MP$ , помимо связи с числом Рейнольдса, явно связан с действием гравитации, однако на высоту образующейся сосульки не влияет. При увеличении гравитации возрастает скорость движения потока воды по поверхности сосульки, однако за промежуток времени между итерационными проходами возможно перемещение только в соседнюю ячейку. Следовательно, увеличение гравитационных сил приводит к уменьшению временного промежутка между итерационными проходами. Однако явно заметно уменьшение толщины сосульки при росте  $MP$ .

Увеличение  $FP$  практически не влияет на рост в высоту, но способствует сильному увеличению роста в ширь. Значение параметра  $FP$  может быть связано не только с термодинамическими характеристиками жидкости, но и с концентрацией примесей в замораживаемой воде. Процесс замораживания переохлажденной жидкости ограничивается площадью контакта с уже замерзшими молекулами, присутствие же примесей ускоряет процесс образования ледяных зародышей, поскольку молекулы примесей служат центрами кристаллизации.

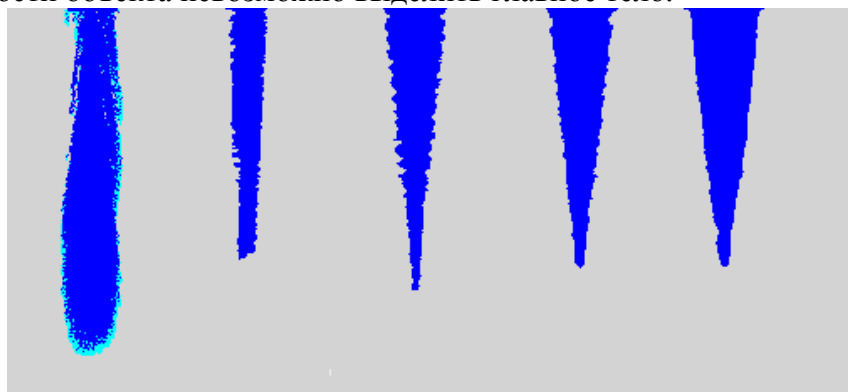
На рис. 3 продемонстрировано влияние  $FP$  в модели, рядом приведены для сравнения сосульки из дистиллированной и кипяченой воды, выросшие при одинаковых условиях [5].

Наиболее удачными значениями  $FP$  для получения привычных тонких сосулечек являются значения из промежутка от 0.008 до 0.018.



*Рис. 3 Сосульки при  $FP = 0.012$  и  $0.0.35$*

При значении параметра  $FR=0$ , образуется крайне нерегулярная пористая структура из ледяных игл, при значении  $FR=1$  уже плотная, но чрезвычайно изломанная. При значении 2 образуется привычная сосулька, при дальнейшем повышении структура становится все более плотной и гладкой. На рис.4 изображены сосульки, выросшие при параметре  $FR$  варьирующемся от 0 до 4. Для значения 0 выдан результат работы без фильтрации, так как из за высокой пористости объекта невозможно выделить главное тело.



*Рис.4 Сосульки при значениях  $FR$  0, 1, 2, 3, 4*



*Рис.5 Сосульки при значениях  $SP$  1, 2, 4, 8*

Увеличение параметра  $SP$  приводит к уменьшению толщины сосульки. Также приводит к увеличению высоты, но начинает сильно проявляться эффект преждевременного обрезания (о котором ниже). На рис. 5 изображены сосульки, выросшие при значениях параметра 1,2,4 и 8.

В последнем случае виден эффект преждевременного обрезания, который заключается в том, что не всегда острова зародыши успевают соединиться с телом сосульки, прежде чем прервется процесс выполнения алгоритма. Часто они срстаются между собой,

но не с сосулькой, поскольку в первом водном промежутке из-за разрастания основания присутствует меньшее количество энергетически более выгодных мест, нежели в основании. На рис.6 отмечены участки: сросшиеся – сплошной линией, не сросшиеся –пунктирной линией. При прохождении фильтрации сосулька обрезается на первом красном участке. Тем самым проявляется преждевременное срезание: при зарастании первого участка высота возрастает в 1.5 раза, а при зарастании всех участков – в 2.5.

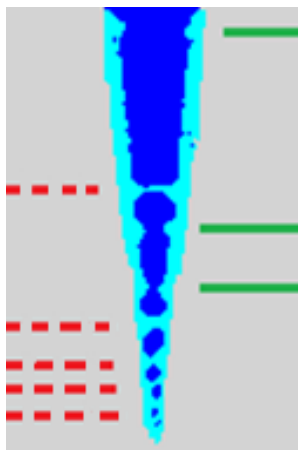


Рис.6 Срезание

При проявлении такого эффекта необходимо либо продолжить работу алгоритма, до тех пор, пока потери от срезания не будут малы, либо запускать алгоритм на несколько шагов, динамически повышая FP.

Главным преимуществом предлагаемой модели, в сравнении с исходной моделью Зилдера-Лозовского, является наличие в ней эффекта волнообразования.

волны образуются при зарастании промежутков, ширина которых зависит от возможной толщины ледяного слоя, определяемого SP, и от образования новых зародышей, определяемого FR. На рис. 7 приведены профили сосуллек (значение радиуса и верхняя и нижняя граница доверительного интервала), выращенных при следующих значениях FR и SP: а)  $FR = 2, SL = 5$  , б)  $FR = 2, SL = 3$ . Волнам на поверхности соответствуют резкие изменения радиуса. Длины волн в среднем пропорциональны  $FR * SR$ . Кроме того можно заметить, что вблизи основания сосульки длина волны меньше чем на соседних участках. Этот факт согласуется с реальностью, так как вблизи основания поверхность сосульки больше отклоняется от вертикали.

#### 4. Выводы

Предложенная модель является улучшением исходной модели Зилдера-Лозовского за счет рассмотрения не только роста, ограниченного диффузией, но и роста, ограниченного кинетикой. В данной модели наблюдается эффект волнообразования на поверхности сосульки, отсутствующий в оригинальной модели. Данную модель можно использовать в компьютерной графике для построения каркасов сосуллек на основе профилей вращения (пример приведен на рисунке 8).

В дальнейшем возможно развитие модели за счет рассмотрения роста, ограниченного теплопередачей, модификации алгоритма для обхода геометрических искажений, вызываемых использованием квадратной сетки, переход от фиксированного набора состояний к состояниям, описывающим концентрацию различных состояний в ячейке, что позволит оптимизировать и параллелизовать работу алгоритма. Также возможно усовершенствовать процедуру остановки работы алгоритма, для избавления от эффекта преждевременного обрезания.

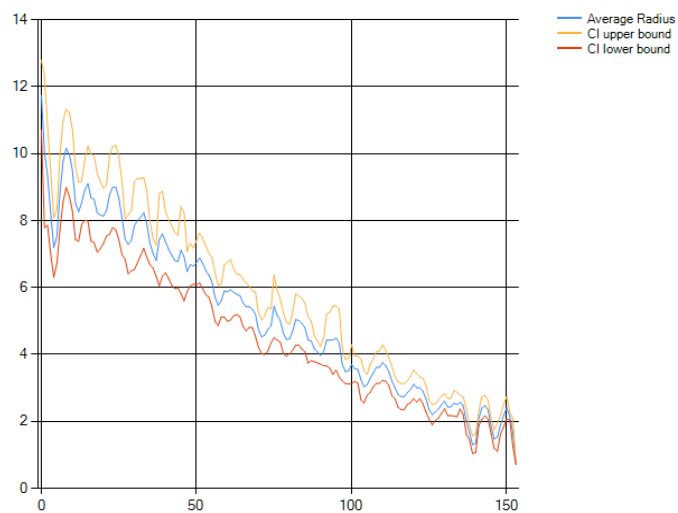
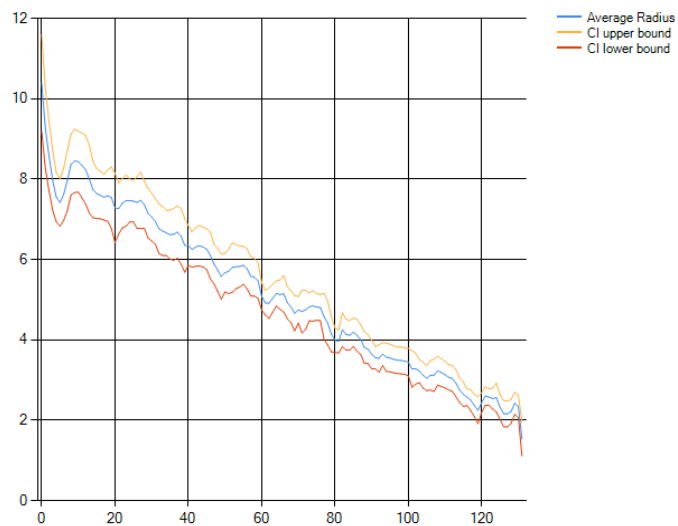
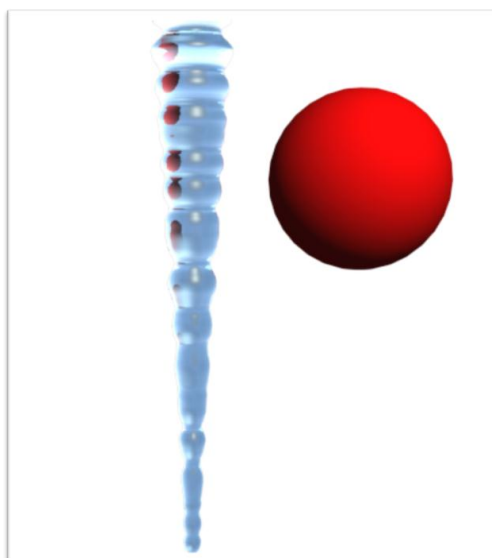


Рис.7 Профили сосулек при значениях  $FP=2$ ,  $SP=5$ ,  $3$



*Рис. 8 Модель, полученная вращением профиля сосульки*

### **Список литературы**

- [1] K. Szilder, E.P. Lozowski Simulation of icicle growth using a three dimensional random walk model //Atmospheric Research. 1995. 36, 243-249
- [2] Jonathan Gagnon, Eric Paquette Procedural and interactive icicle modeling // Vis Comput. 2011. 27, 451–461
- [3] Yukio Saito 1996 Statistical Physics of Crystal Growth (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.)
- [4] Kenneth A. Jackson 2004 Kinetic Processes: Crystal Growth, Diffusion, and Phase Transitions in Materials (WILEY-VCH Verlag GmbH& Co. KGaA)
- [5] K Ueno, M Farzaneh, S. Yamaguchi, H. Tsuji Numerical and experimental verification of a theoretical model of ripple formation in ice growth under supercooled water film flow.// arXiv:1102.4890v1
- [6] Theodore Kim, Michael Henson, Ming C. Lin A Hybrid Algorithm for Modeling Ice Formation. //Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation 2004