Математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 16.04.2000г.

<u>Для вузов третьей группы.</u>

1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} x^2 \operatorname{sign}(\cos x)dx$. 1 балл

2. Исследовать на сходимость $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(k!)}$. 2 балла

3. Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}$. 3 балла

4. В эллипсоид $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ вписать прямой эллиптический цилиндр (ось цилиндра совпадает с осью эллипсоида) максимального объёма. 3 балла

5. Пусть $f:[0,a]\to R$ — строго возрастающая дифференцируемая функция, $f(0)=0$, g — функция, обратная f. Доказать, что для $x\in[0,a]$
$$xf(x)=\int\limits_0^x f(t)dt+\int\limits_0^{f(x)} g(t)dt.$$
3 балла

<u>Для всех вузов.</u>

6. Найти такую дифференцируемую f, что $f(x)=x^2+2\int\limits_0^1 f(xt)dt$. 4 балла

7. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)...2n}$. 5 баллов

8. Найти функцию f, удовлетворяющую условиям
$$\begin{cases} f'(x)=f'(x-1) \\ f(x)+f(x-1)=x \end{cases}.$$
5 баллов

9. Найти функцию f дважды дифференцируема на $[0,1]$ и выпукла вниз, кроме того $f'(1)<2f(1)$. 10. Доказать, что $\int\limits_0^1 f(x)dx>0$. 6 баллов

10. Пусть функция f задана и интегрируема по Риману на $[0,1]$ и $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} x\int\limits_x^1 \frac{f(t)}{t^2}dt=0$. 6 баллов

11. Пусть функция f задана и имеет непрерывную производную на отрезке $[a,b]$, $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f'(x)dx=0$. Доказать, что для всех $x\in[a,b]$ будет $|f(x)|\le\frac{1}{2}\int\limits_a^b |f'(x)|dx$.
7 баллов

12. В R^3 задана поверхность $x^5+y^5=z^7$. Найти все прямые, принадлежащие этой поверхности. 7 баллов

13. Пусть $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\cos(4^k x)$ Доказать существование такой константы $C>0$, что для всех $x_1, x_2 \in R$ будет $\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \le C\sqrt{\left|x_1-x_2\right|}$. 8 баллов

14. Найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$. 9 баллов

Функция f задана и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, $f(a)=a$, $f(b)=b$. Доказать существование таких различных точек, что $x_1, x_2 \in (a,b)$, ÷òî $f'(x_1)f(x_2)=1$.
10 баллов

Результаты олимпиады 2000 года.

ОЛИМПИАДА С.-ПЕТЕРБУРГА 1999-2000 УЧ.Г. 16.04.2000
Командное первенство

1 группа			
вуз	кол-во баллов	место в групп.	абсол. место
ИТМО	174/104	1	1
СПГТУ	162/107	2	2
ЛЭТИ	68	3	5

2 группа			
вуз	кол-во баллов	место в групп.	абсол. место
ВИКУ	98/56	1	3
СПГТИ	79	2	4
ВИТУ	67/28	3	6
СПГУКиТ	52	4	8
СЗПИ	40	5	10
ВМИРЭ	29	6	11
ГУВК	27	7	12

3 группа			
вуз	кол-во баллов	место в групп.	абсол. место
СПГИ	54/23	1	7
СПГУПС	45/28	2	9
ГМА	26,5	3	13
ВМИИ	22	4	14
АГА	21,5	5	15
ВАУ	19	6	16

Личное первенство

1 группа					
участник	вуз	кол-во баллов	место в групп.	абсол. место	диплом
Курасов А.Е.	ИТМО	45	1	1	1 ст.
Станкевич А.С.	ИТМО	44	2	2	1 ст.

Никитченко А.В.	СПГТУ-1	40	3	3	2 ст.
Шарков М. Д.	СПГТУ-2	35	4	4	2 ст.
Веретенников Д. О.	СПГТУ-1	34	5	5	2 ст.
Наривончик С. С.	ИТМО	33	6-7	6-7	2 ст.
Никитченко М.В.	СПГТУ-1	33	6-7	6-7	2 ст.
Захаров А.С.	ИТМО	32	8-9	8-10	3 ст.
Корытов М.Н.	СПГТУ	32	8-9	8-10	3 ст.
Глазов М.М.	СПГТУ-2	30	10	11	3 ст.

2 группа					
участник	вуз	кол-во баллов	место в групп.	абсол. место	диплом
Трофимов И.А.	ВИКУ-1	32	1	8-10	1 ст.
Климченко Д.Ю.	ВИКУ -2	25	2	13	2 ст.
Карпичев Д.А.	ВИКУ -1	24	3	14	2 ст.
Червинский А.В.	СПГТИ	21	4-5	17-18	3 ст.
Сердюков Н.А.	ВИТУ	21	4-5	17-18	3 ст.
Семушин Д.А.	СПГТИ	20	6-7	19-23	3 ст.
Акимов Д.Г.	СПГТИ	20	6-7	19-23	3 ст.

3 группа					
участник	вуз	кол-во баллов	место в групп.	абсол. место	диплом
Немцов А.Б.	ГУПС-1	19	1	24-28	1 ст.
Селиванов А.А.	СПГИ	18	2	29-31	2 ст.
Волохов Е.М.	СПГИ	14	3	35-37	2 ст.
Журавлев А.Е.	СПГИ	12	4	38-41	3 ст.
Падалко А.С.	СПГУПС	11	5	42-43	3 ст.
Назаров А.Я.	СПГИ	10	6	44-46	3 ст.
Сараев В.В.	СПГУПС	9	7	47-48	3 ст.

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Кол-во решивших	20	4	1	1	7	36	40	112	23	14	8	22	3	5	8