Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский государственный
университет информационных технологий,
механики и оптики

Открытая математическая олимпиада Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2006г.

Санкт-Петербург
2006

В 2000 - 2006 гг. студенческая олимпиада г. Санкт-Петербурга по математике проводилась Санкт-Петербургским государственным университетом информационных технологий, механики и оптики (СПбГУ ИТМО). В 2006 г. олимпиада вышла за рамки города, и кроме команд из 21 вуза Санкт-Петербурга в ней участвовала и команда из Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого. Участники были разбиты на три группы по количеству часов курса высшей математики в вузе. В первую группу вошли вузы с объемом курса, превышающим 550 часов, во вторую - с объемом от 400 до 550 часов, в третью - с объемом менее 400 часов. Каждый вуз мог выставить одну или две команды по 7 человек. В личном зачете участвовали все заявленные студенты. В командный зачет входили пять участников с лучшими результатами из команды. Результат вуза в командном зачете определялся по результату лучшей из его команд (если их две).

Олимпиада проводилась в воскресенье 2 апреля 2006 года. На решение задач отводилось 4 часа. Пользоваться справочной литературой не разрешалось. Студентам всех групп было предложено 12 задач.

Председателем жюри был профессор СПбГУ Н.А. Широков. В оргкомитет олимпиады входили: ректор СПбГУ ИТМО, проф., д.т.н. Васильев В.Н., проф., д.ф.-м.н Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Фролов С.В, асс. Сытенко Н.В., асс. Гортинская Л.В., асс. Тесовская Е.С.

Составители: проф., д.ф.-м.н. Н.А. Широков, проф., д.ф.-м.н. Попов И.Ю., доц., к.ф.-м.н. Фролов В.М., асс. Фролов С.В, асс. Сытенко Н.В., асс. Гортинская Л.В., асс. Тесовская Е.С.

Задачи открытой олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 02.04.2006

1. Найти непрерывную функцию $f(x)$ такую, что

$$\int_{-x}^{0} \frac{f(x+t)}{e^x + e^{-t}}\, dt = \frac{1}{1+e^x},\ x \in \mathbb{R}.$$ (2 балла)

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \ldots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}\right)$. (2 балла)

3. Докажите, что любую ненулевую диагональную матрицу $(n \times n)$ при $n > 1$ можно представить в виде суммы двух матриц, определитель каждой из которых равен единице. (2 балла)

4. Пусть X и Y - квадратные матрицы порядка n, причем матрица X - невырожденная. Может ли коммутатор этих матриц ($XY - YX$) оказаться равным матрице X ? (4 балла)

5. На параболе $y^2 = 2px$ найти точку так, чтобы нормаль, проведенная к параболе в этой точке, отсекала сегмент наименьшей площади.(5 баллов)

6. Пусть A - квадратная матрица порядка $n = 2006$, все элементы которой равны единице, E - единичная матрица такого же порядка. Найти матрицу $\left(E - A\right)^{-2006}$. (5 баллов)

7. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{a_n x} + 1}$ при $x > 0$, если $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$ при $n = 1, 2, \ldots$. (7 баллов)

8. Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени n, определяемый равенством $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = \frac{P_n(x)}{\left(1+x^2\right)^{n+1}}$. Доказать, что имеет место равенство $P_{n+1}(x) + 2x(n+1)P_n(x) + n(n+1)\left(1+x^2\right)P_{n-1}(x) = 0$. (8 баллов)

9. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, причем для всех $x \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\left| f''(x) + 2xf'(x) + (x^2+1) f(x)\right| \le 1$. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. (8 баллов)

10. По прямой $x+y=2\sqrt{a^2+b^2}$ движется источник света S. При каком положении S тень, отбрасываемая эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ на прямую $x+y=-2\sqrt{a^2+b^2}$, имеет наименьшую длину. (8 баллов)

11. Пусть $g(x)\in C^1[0;+2)$ и $g'(x)\geq 0$ для любого $x\in[0;2)$. Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ верно неравенство

$$\int_1^{\frac{2}{n+1}} g(x)dx+\int_1^{\frac{4}{n+1}} g(x)dx+\int_1^{\frac{6}{n+1}} g(x)dx+\ldots+\int_1^{\frac{2n}{n+1}} g(x)dx\geq 0.$$

(8 баллов)

12. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $4y^2y''=x\left(y'\right)^3$, $y(1)=1,\ y'(1)=2$. (8 баллов)

Ответы и решения.

1. При $x=0$ получается неверное равенство. Следовательно, такой функции не существует. Возможно другое решение:

$$\int_{-x}^{0}\frac{f(x+t)}{e^x+e^{-t}}dt=\begin{vmatrix} y=x+t \\ dt=dy\end{vmatrix}=\int_0^x\frac{f(y)}{e^x+e^{x-y}}dy=\frac{1}{e^x}\int_0^x\frac{f(y)}{1+e^{-y}}dy.$$

По условию $\displaystyle\int_{-x}^{0}\frac{f(x+t)}{e^x+e^{-t}}dt=\frac{1}{1+e^x}$, следовательно, $\displaystyle\frac{f(x)}{1+e^x}=\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)'$,

$$\frac{e^xf(x)}{1+e^x}=\frac{e^x\left(1+e^x\right)-e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

Таким образом, $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$. Поскольку имелся неравносильный переход, ответ необходимо проверить подстановкой, которая показывает, что данная функция не является решением.

2. Обозначим $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+k}}$. Заметим, что

$$a_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(1+n)n}{2\sqrt{n^4+1}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

$$a_n\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n^4+n}}=\frac{1}{\sqrt{n^4+n}}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{(1+n)n}{2\sqrt{n^4+n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

По теореме о сжатой переменной заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

3. Рассмотрим частный случай при $n = 2$. Тогда для любой ненулевой диагональной матрицы имеем:

$A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Легко заметить, что определители обеих матриц равны единице. Теперь рассмотрим случай $n = 3$. Так как матрица должна быть ненулевой, то хотя бы один элемент на главной диагонали отличен от нуля. Предположим, что $c \neq 0$. Пусть $c > 0$. Тогда имеем:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ -r & b & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix}, \text{ где } r = \sqrt{\frac{2}{c}}.$$

Если $c < 0$, тогда

$$A_3 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ -r & b & 0 \\ 0 & 0 & c/2 \end{pmatrix}, \text{ где } r = \sqrt{-\frac{2}{c}}.$$

Легко проверить, что определители обеих матриц равны единице.
Любую квадратную матрицу можно представить в виде блочно-диагональной матрицы, составленной из блоков A_2 и, если n нечетное, A_3. Таким образом, утверждение доказано.

4. Нет, не может. Из условия $XY - YX = X$ следует равенство $XYX^{-1} - Y = E$. Но матрицы XYX^{-1} и Y подобны и, тем самым, имеют одинаковый след. Поэтому $\mathrm{Tr}\left(XYX^{-1} - Y\right) = 0$, но $\mathrm{Tr}\, E = n \neq 0$.

Утверждение о равенстве следов подобных матриц может быть доказано следующим образом: $\det\left(XYX^{-1} - \lambda E\right) = \det\left(X\left(Y - \lambda E\right)X^{-1}\right) = \det\left(Y - \lambda E\right)$, то есть характеристические полиномы матриц XYX^{-1} и Y совпадают, а след матрицы является коэффициентом характеристического полинома при $\left(-\lambda\right)^{n-1}$, где n – порядок матрицы.

5. Пусть парабола имеет уравнение $y^2 = 2px$ и $M_0\left(x_0, y_0\right)$ - искомая точка. Будем считать, что $p > 0,\ y < 0$. Чтобы найти площадь сегмента перейдем к полярным координатам $x - x_0 = r\cos\varphi,\ y - y_0 = r\sin\varphi$. Тогда уравнение параболы будет иметь вид $r = \frac{2p\cos\varphi - 2y_0\sin\varphi}{\sin^2\varphi}$. Площадь сегмента вычислим по формуле $S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + \frac{\pi}{2}} r^2\left(\varphi\right) d\varphi$, где φ_0 – угол наклона нормали к параболе в точке M_0. Так как вектор нормали равен $\left(p, -y_0\right)$, то $tg\varphi_0 = -\frac{y_0}{p}$.

Теперь вычислим интеграл:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,d\varphi=\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}\frac{4p^2\cos^2\varphi-8py_0\sin\varphi\cos\varphi+4y_0^2\sin^2\varphi}{\sin^4\varphi}d\varphi=$$

$$=-\frac{4}{3}p^2\left(\mathrm{ctg}^3\varphi\right)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}+4py_0\frac{1}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}-4y_0^2\left(\mathrm{ctg}\varphi\right)\Big|_{\varphi_0}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{4}{3}p^2\left(-\mathrm{tg}^3\varphi_0-\mathrm{ctg}^3\varphi_0\right)+4py_0\left(\frac{1}{\cos^2\varphi_0}-\frac{1}{\sin^2\varphi_0}\right)-$$

$$-4y_0^2\left(-\mathrm{tg}\varphi_0-\mathrm{ctg}\varphi_0\right)=-\frac{4}{3}\frac{\left(y_0^2+p^2\right)^3}{py_0^3}.$$

Дифференцируя эту площадь по переменной y_0, и, исследуя производную, получим $y_0=\pm p$. Ответ: $\left(\dfrac{p}{2},\pm p\right)$.

6. Поскольку $A^2=nA$, то $A^2-A-(n-1)A+(n-1)A=(n-1)E$, откуда получаем $A(A-E)-(n-1)(A-E)=\left[A-(n-1)E\right](A-E)=(n-1)E$ и

$$\left(E-A\right)^{-1}=E-\frac{1}{n-1}A.$$

$$\left(E-A\right)^{-n}=\left(E-\frac{1}{n-1}A\right)^n=E+\sum_{k=1}^{n}c_n^k\frac{(-1)^k}{(n-k)^k}A^k=E+\sum_{k=1}^{n}c_n^k\frac{(-1)^k n^{k-1}}{(n-k)^k}A=$$

$$=E+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c_n^k\left(\frac{-n}{n-1}\right)^kA=E+\frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{n}{n-1}\right)^n-1\right]=E-\frac{1}{n}\left[1-\left(\frac{-1}{n-1}\right)^n\right]A$$

Тогда при $n=2006$ получаем $\left(E-A\right)^{-2006}=E-\dfrac{1}{2006}\left[1-\left(\dfrac{1}{2005}\right)^{2006}\right]A$.

7. Рассмотрим частную сумму

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{e^{a_nx}+1}=\sum_{n=1}^{N}\frac{a_ne^{-a_nx}}{e^{-a_nx}+1}=\sum_{n=1}^{N}\left(-\ln\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'=$$

$$=-\left(\sum_{n=1}^{N}\ln\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)'=-\left(\ln\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)\right)' \qquad (1)$$

Преобразуем произведение

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)=\frac{1-e^{-a_1x}}{1-e^{-a_1x}}\prod_{n=1}^{N}\left(1+e^{-a_nx}\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\left(1-e^{-a_1x}\right)\left(1+e^{-a_1x}\right)\left(1+e^{-a_2x}\right)\ldots\left(1+e^{-a_nx}\right)=\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\left(1-e^{-2a_nx}\right)$$

Проинтегрируем равенство (1): $-\int_x^{+\infty} S_N(x)dx = -\left(\ln\frac{\left(1-e^{-2a_nx}\right)}{1-e^{-a_1x}}\right).$

При $N\to\infty,\ x>0$: $-\int_x^{+\infty} S_N(x)dx = -\left(\ln\frac{1}{1-e^{-a_1x}}\right) = \ln\left(1-e^{-a_1x}\right).$

После дифференцирования получаем: $S(x) = \frac{-(-a_1)e^{-a_1x}}{1-e^{-a_1x}} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x-1}.$

8. Возьмем равенство $\left(\operatorname{arctg} x\right)'\cdot\left(1+x^2\right)=1$ и продифференцируем его $(n+1)$ раз. Получим

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)^{(n+2)}\left(1+x^2\right)+(n+1)\left(\operatorname{arctg} x\right)^{(n+1)}\cdot 2x+\frac{(n+1)n}{2}\left(\operatorname{arctg} x\right)^{(n)}\cdot 2=0.$$

Упрощая полученное равенство с учетом того, что $\left(\operatorname{arctg} x\right)^{(n)} = \frac{P_{n-1}(x)}{\left(1+x^2\right)^n}$,

получим требуемое.

9. Применим дважды правило Лопиталя к функции $\frac{e^{x^2/2} f(x)}{e^{x^2/2}}$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2/2} f(x)}{e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2/2}\left(xf(x)+f'(x)\right)}{xe^{x^2/2}} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2/2}\left(\left(x^2+1\right)f(x)+2xf'(x)+f''(x)\right)}{e^{x^2/2}\left(x^2+1\right)} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+1\right)f(x)+2xf'(x)+f''(x)}{x^2+1}=0.$$

От студентов не требовалось доказательства правомочности применения правила Лопиталя. Отметим, что возможность его использования не требует дополнительных ограничений на функцию $f(x)$. Смотри, например, доказательство правила Лопиталя (Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1), где не требуется предположение о том, что функция в числителе дроби стремится к бесконечности.

10. Предположим сначала, что $a=b$, то есть что эллипс является окружностью. В этом случае тень, отбрасываемая окружностью $x^2+y^2=a^2$ на прямую $x+y=-2\sqrt{2a^2}$ при движении точки по прямой $x+y=2\sqrt{2a^2}$ имеет наименьшую длину тогда, когда точка является проекцией центра окружности на прямую, в чем можно убедиться с помощью простых элементарно-геометрических построений или вычислением. Выполним линейное преобразование плоскости, переводящее эллипс в окружность. Так как оно переводит прямые в прямые и не изменяет соотношения длин параллельных отрезков (а также свойства пересекать эллипс), то искомая точка получается обратным преобразованием из экстремальной точки для окружности. Нужным свойством обладает растяжение вдоль оси OX с коэффициентом $k=\dfrac{a}{b}$. Его координатное выражение $\xi = kx$, $\eta = y$ позволяет найти уравнения образов прямых: $\dfrac{\xi}{k}+\eta=\pm 2\sqrt{a^2+b^2}$. Так как к такой прямой перпендикулярен вектор $(1,k)$, то проекцией начала координат является точка вида (t,kt). Подставляя в уравнение, получаем $t\left(\dfrac{1}{k}+k\right)=2\sqrt{a^2+b^2}$, откуда $t=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Применяя к найденной точке обратное преобразование, находим искомую: $\left(\dfrac{t}{k},kt\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

11. Рассмотрим функцию $F(t)=\int_0^t g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx$, $n\in\mathbb{N}$, определенную на интервале $[0,n+1)$. Эта функция выпукла, так как

$F''(t)=\dfrac{2}{n+1}g\left(\dfrac{2}{n+1}t\right)\ge 0,\ \forall\, t\in[0,n+1)$. Поэтому к $F(t)$ можно применить неравенство Йенсена: $F\left(\sum\limits_{i=1}^n q_i t_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^n q_i F(t_i)$, $q_1+q_2+\ldots+q_n=1$.

Выберем $q_i=\dfrac{1}{n}$, $t_i=i$, $i=1,\ldots,n$. Получим $nF\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\le\sum\limits_{i=1}^n F(i)$ и, учитывая определение функции $F(t)$, запишем

$n\int_0^{\frac{n+1}{2}} g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx\le\int_0^1 g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx+\ldots+\int_0^n g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx$. После очевидного преобразования, имеем

$\int_{\frac{n+1}{2}}^1 g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx+\int_{\frac{n+1}{2}}^2 g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx+\ldots+\int_{\frac{n+1}{2}}^n g\left(\dfrac{2}{n+1}x\right)dx\ge 0$. Подставив $y=\dfrac{2}{n+1}x$, получим $\int_1^{\frac{2}{n+1}} g(y)dy+\int_1^{\frac{4}{n+1}} g(y)dy+\ldots+\int_1^{\frac{2n}{n+1}} g(y)dy\ge 0$.

12. Делим данное уравнение на $4y^3$: $\frac{y''}{y}=\frac{1}{4}x\left(\frac{y'}{y}\right)^3$. Обозначим $z=\frac{y'}{y}$, тогда $z'=\frac{y''y-y'^2}{y^2}=\frac{y''}{y}-\left(\frac{y'}{y}\right)^2=\frac{y''}{y}-z^2$, откуда $\frac{y''}{y}=z^2+z'$. Подставляя в уравнение, получаем: $z^2+z'=\frac{1}{4}xz^3$ или $z'=\frac{1}{4}xz^3-z^2$. Поделим почленно на z^2: $\frac{z'}{z^2}=\frac{1}{4}xz-1$. Обозначим $u=\frac{1}{z}$, откуда $\frac{z'}{z^2}=-u'$, тогда уравнение превращается в $u'=1-\frac{x}{4u}$. Введем $u=vx$. Тогда $u'=v'x+v$ и уравнение принимает вид $v'x+v=1-\frac{1}{4v}$ или $v'=-\frac{v^2-v+0,25}{vx}$, то есть $v'=-\frac{(v-0,5)^2}{vx}$, которое является уравнением с разделяющимися переменными и с начальным условием $v(1)=0,5$ так как $v=\frac{1}{xz}=\frac{y}{xy'}$. При таком начальном условии уравнение имеет единственное решение – постоянную функцию $v=0,5$, что означает, что $\frac{y}{xy'}=0,5$. Решая это уравнение с разделяющимися переменными при начальном условии $y(1)=1$, получим $y=x^2$.

Заметим, что решение $y=x^2$ задачи Коши может быть угадано. Тогда для окончательного решения задачи необходимо проверить выполнение условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

Результаты олимпиады 2006 года.

В олимпиаде приняли участие команды следующих вузов:

- Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики – ИТМО (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный политехнический университет – СПГПУ,
- Российский государственный педагогический университет им. А.И. Герцена – РГПУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет, факультет прикладной математики и процессов управления – СПГУ (ПМПУ),
- Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого – НовГУ,
- Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет – СПГАСУ,
- Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет – СПГЭТУ,
- Санкт-Петербургский государственный университет, экономический факультет – СПГУ(эк),
- Военно-космическая академия им. А.Ф.Можайского – ВКА (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения – СПГУКиТ,
- Военный инженерно-технический университет – ВИТУ (2 команды),
- Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет) – СПГТИ,
- Санкт-Петербургский государственный университет водных коммуникаций – СПГУВК,
- Военно-морской институт радиоэлектроники им. А.С.Попова – ВМИРЭ,
- Пушкинский военный институт радиоэлектроники космических войск – ПВИРЭКВ,
- Государственный университет аэрокосмического приборостроения – ГУАП,
- Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича – СПГУТ,
- Северо-западный заочный государственный технический университет – СЗГТУ,
- Санкт-Петербургский государственный горный институт (технический университет) – СПГГИ,
- Военно-морской инженерный институт – ВМИИ,
- Государственная морская академия им. адм. С.О.Макарова – ГМА,
- Санкт-Петербургский Военно-морской институт – корпус Петра Великого – СПВМИ.

Командное первенство

Если от вуза участвовало две команды, то результат второй указан через дробную черту.

I группа

вуз	Кол-во баллов	Место в группе
ИТМО	127 / 67	1(1 ст.)
СПГПУ	101	2(2 ст.)
СПГУ(ПМПУ)	54,5	3(3 ст.)
НовГУ	29	4(3 ст.)
СПГАСУ	23	5
СПГЭТУ	21	6-7
РГПУ	21	6-7

II группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
ПВИРЭКВ	41	1(1 ст.)
ВКА	25 / 12	2-3(2 ст.)
СПГУВК	25	2-3(2 ст.)
СПГУ (эк)	20	4(3 ст.)
ВИТУ	18,5 / 10,5	5(3 ст.)
СПГТИ	12	6
ВМИРЭ	9,5	7
СПГУТ	4	8
СПГУКиТ	1,5	9
ГУАП	0	10

III группа

вуз	Кол-во баллов	место в группе
СПГГИ	19,5	1(1 ст.)
ГМА	15	2(2 ст.)
ВМИИ	8	3(3 ст.)
СЗГТУ	6	4
СПВМИ	4,5 / 3	5

Личное первенство

I группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Павлов Д.С.	ИТМО	37	1	1 ст.
Пименов С.Ю.	ИТМО	35,5	2	1 ст.
Буздов М.А.	СПГУ(ПМПУ)	27	3	2 ст.
Нгуен Ван Тханг	СПГПУ	26,5	4	2 ст.
Нгуен Куок Тинь	СПГПУ	26	5	2 ст.
Буздалов М.В.	ИТМО	21,5	6	3 ст.

II группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Ваганов А.А.	ПВИРЭКВ	16	1	1 ст.
Чалдыкин Е.И.	СПГУВК	14,5	2	2 ст.
Хващенко Е.К.	ВКА	11,5	3	2 ст.
Расторгуев Ал.С.	ПВИРЭКВ	11	4	2 ст.
Кудрицкий И.Б.	ВИТУ	8,5	5	3 ст.
Куприянов И.А.	СПГУВК	8	6 – 7	3 ст.
Петтай П.П.	СПГУ (эк)	8	6 – 7	3 ст.

III группа

Участник	вуз	кол-во баллов	место в группе	диплом
Ходаковский Е.С.	СПГГИ	11	1	1 ст.
Фадеев В.В.	ГМА	7	2	2 ст.
Виноградов П.В.	ВМИИ	6	3	2 ст.
Нгуен Суан Бак	СПГГИ	5	4	3 ст.
Чабоненко С.А.	ГМА	5	5	3 ст.
Снегуров А.А.	СЗГТУ	3	6	3 ст.

Результаты участников, вошедших в командный зачет.

I группа

ИТМО

Павлов Д.С.	37
Пименов С.Ю.	35,5
Зворыгин Д.Е.	19,5
Синев И.А.	19
Царев Ф.Н.	16

СПГПУ

Нгуен Ван Тханг	26,5
Нгуен Куок Тинь	26
Оленников А.	20
Петров И.	17,5
Двас Н.	11

РГПУ

Никулина Ю.С.	13
Хоанг Нгы Хуан	3
Меркулов А.С.	3
Чириков А.М	2

СПГУ (ПМПУ)

Буздов М.А.	27
Тур Н.С.	14,5
Астюкова А.А.	5
Колуканова Е.А.	4
Яковлева Е.А.	4

СПГЭТУ

Нгуен Ван Шо	11
Чех А.И.	5
Козлов М.И.	3
Разумовский А.Г.	2

НовГУ

Шумов И.К.	13,5
Панкратова А.В.	4,5
Евлампиева Л.Н.	4
Соловьев А.К.	4
Васильева А.В.	3

СПГАСУ *)

Прусова Л.	9
Жаткин А.	7
Пашкова А.	2,5
Евсиков И.	2,5
Николаев К.	2
Маловичко А.	2

II группа

ВКА *)

Хващенко Е.К.	11,5
Лобков И.А.	7,5
Кардапольцев С.В.	3
Габов Р.А.	2
Чемров М.С.	1
Юшкевич В.А.	1
Чернявский В.А.	1

СПГТИ

Кузьменко И.Ю.	6,5
Валеахметов Р.И.	3
Хайдаров В.Г.	2
Однолетков М.А.	0,5

СПГУКиТ

Красницкая О.А.	1
Федорова Т.А.	0,5

СПГУТ

Данилова Т.В.	3
Туртыгин И.С.	1

ПВИРЭКВ *)

Ваганов А.А.	16
Расторгуев Ал.С.	11
Расторгуев Ан.С.	5,5
Горщков К.С.	4,5
Малых М.С.	4
Орлов Р.С.	4

СПГУ (эк)

Петтай П.П.	8
Чинцова А.К.	4,5
Михайлов И.А.	3
Якубовская Д.Л.	2,5
Глухова О.А.	2

ВИТУ *)

Кудрицкий И.Б.	8,5
Григоращенко А.Е.	5
Климов Д.В.	2,5
Колесенко Е.А.	1,5
Журавлев Л.И.	1
Катин В.А.	1

ВМИРЭ

Свеченый Д.П.	4
Иову П.А.	2
Притчин А.И.	2
Кабиров Д.И.	1,5

СПГУВК

Чалдыкин Е.И.	14,5
Куприянов И.А.	8
Казанцев Н.В.	1,5
Федотова А.О.	1

III группа

СПГГИ *)

Ходаковский Е.С.	11
Нгуен Суан Бак	5
Зацепин М.А.	1,5
Нгуен Тху Хьен	1
Меньшиков С.С.	1
Перфильева Д.В.	1

СПВМИ

Вафин Р.Р.	1
Игнатьев Ф.С.	1
Кузнецов М.В.	1

ВМИИ

Виноградов П.В.	6
Дроздов В.И.	2

ГМА

Фадеев В.В.	7
Чабоненко С.А.	5
Федоров С.И.	2
Кауров М.В.	1

СЗГТУ

Снегуров А.А.	3
Остапчук С.С.	1,5
Деньдобренко Д.А.	1,5

*) В зачет команды вошли пять участников.

Количество участников, решивших задачи (определено по формуле: полная сумма набранных всеми участниками баллов за задачу, деленная на стоимость задачи).

№ задачи	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Кол-во решивших	30,8	38,8	12,8	12,8	14,4	5,8	7	16,8	2,3	15,8	13,6	9,4

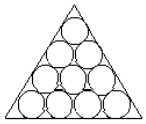
<u>Приложение.</u> **Задачи олимпиады Санкт-Петербурга среди студентов технических вузов 2005 года**

1. Непрерывная на оси функция f принимает только иррациональные значения. $f(\sqrt{2})=\sqrt{e}$. Найти $f(2)$. (2 балла)

2. Пусть $x_1,\ldots x_5$ - корни уравнения $x^5-x-1=0$. Найти $x_1^6+x_2^6+\ldots+x_5^6$. (3 балла)

3. Пусть A - $(n\times n)$-матрица, все элементы которой являются четными числами. Могут ли среди ее собственных чисел быть нечетные? (3 балла)

4. В равносторонний треугольник вписаны окружности так, как показано на рисунке. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{S}$, где S - площадь треугольника, а S_n - сумма площадей всех n кругов. (4 балла)



5. Найти дифференцируемую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую уравнению $\int\limits_0^1\varphi(ax)da=n\varphi(x)$. (4 балла)

6. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/4}\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{2n+1}dx$. (5 баллов)

7. Доказать неравенство: $\ln\dfrac{x+y}{2\sqrt{xy}}\geq\dfrac{x+y}{4xy}-\dfrac{1}{x+y}$ при $x>1,\ y>1$. (5 баллов)

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если $a_n=\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m(n+1)^{2m}}$. (6 баллов)

9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{D_n}{n!\ln n}$, где $D_n=\begin{vmatrix}3 & 1 & \ldots & 1 & 1\\ 1 & 4 & \ldots & 1 & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & 1 & \ldots & n & 1\\ 1 & 1 & \ldots & 1 & n+1\end{vmatrix}$. (7 баллов)

10. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy''-y'+4xy^3=0$. (7 баллов)

11. Найти функцию $f(x)$, непрерывную всюду на вещественной оси за исключением точек $x=0$ и $x=1$ и удовлетворяющую уравнению $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)+2f\left(x+1\right)=x+1$. (9 баллов)

12. Пусть квадратные матрицы A и B третьего порядка таковы, что $A=A^T, B=B^T$, $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\det A>0$, $b_{11}>0$, $\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}>0$, $\det B>0$.

Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}a_{ij}\cdot b_{ji}>0$. (10 баллов)

Задачи олимпиады Санкт-Петербурга
среди студентов технических вузов 2004 года

1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^2 \Big/ \int\limits_0^x e^{2t^2}$. (2 балла)

2. Нарисовать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\left|z^2-3z\right|+1<|z|+|z-3|$. (3 балла)

3. Найти асимптоты обратной функции f^{-1}, если задана сама функция $f(x)=4x-\operatorname{arctg} x$. (4 балла)

4. Функции $fg,\ gh,\ fh$ бесконечно дифференцируемы. Следует ли отсюда непрерывность хотя бы одной из функций f, g, h хотя бы в одной точке? (5 баллов).

5. В выпуклом n-угольнике наудачу выбираются 2 диагонали. Какова вероятность того, что они пересекаются? (Точкой пересечения считается общая точка двух несовпадающих диагоналей, лежащая внутри многоугольника.) (6 баллов)

6. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)\left(x^2+1\right)}$. (6 баллов)

7. Исследовать на сходимость интеграл: $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$. (6 баллов)

8. В последовательности $\{a_n\}$ $a_1=3,\ a_n=a_{n-1}-\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot n!}$, $n=2,3...$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (7 баллов)

9. Существует ли непрерывная на $(1,+\infty)$ функция $f(t)$ такая, что $\int\limits_x^{x^2} f(t)dt=1$ для любого $x>1$. (8 баллов)

10. У симметричной матрицы порядка n все элементы положительны. Докажите, что у нее найдется положительное собственное число. (8 баллов).

11. Функция $f(x)$ такова, что $\int\limits_0^\infty \left(a\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=1$. Найдите максимально возможное значение $f(0)$ в зависимости от a. (10 баллов).

12. Пусть $f(x)$ - многочлен степени n и $\Phi(x)=f(x)+\frac{f'(x)}{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{2^n}$. Доказать, что, если все корни $\Phi(x)$ вещественные, то все корни $f(x)$ тоже вещественные. (10 баллов).