Feedback Motion Planning

Дискретное планирование

1. Набор состояний ***x*** $x \in X$

2. Набор действий ***u*** $u \in U$

3. Transition function:

$$\tilde{x} = f(x, u)$$

4. Начальное состояние x_{init}

5. Конечное состояние x_G

$$u_1, u_1, \ldots, u_n : x_{init} \to x_G$$

Оптимальный путь длины K

Cost functional :

$$L(\pi_K) = \sum_{k=1}^{K} l(x_k, u_k) + l_F(x_F)$$

The final term $l_F(x_F)$ is out side of the sum and is defined as $l_F(x_F) = 0$ if $x_F \in X_G$,
and $l_F(x_F) = \infty$ otherwise.

Оптимальный путь длины K

Обозначим $G^*(x_k)$ оптимальный путь от x_k до x_F, который представляет собой последние F-k ребер оптимального пути от x_I до x_G

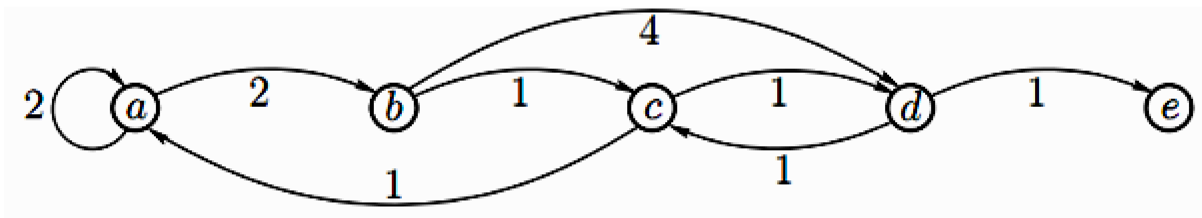
$$G_k^*(x_k) = \min_{u_k,\dots,u_K} \left\{ \sum_{i=k}^{K} l(x_i, u_i) + l_F(x_F) \right\} \qquad (1)$$

Тогда для $G^*(x_k)$ выполняется рекуррентное соотношение

$$G_k^*(x_k) = \min_{u_k} \left\{ l(x_k, u_k) + G_{k+1}^*(x_{k+1}) \right\} \qquad (2)$$

где $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$

Оптимальный путь длины K



$$G_k^*(x_k) = \min_{u_k} \left\{ l(x_k, u_k) + G_{k+1}^*(x_{k+1}) \right\}$$

где $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$

Построение оптимального пути от вершины {a} до вершины {d}:

	a	b	c	d	e
G_5^*	∞	∞	∞	0	∞
G_4^*	∞	4	1	∞	∞
G_3^*	6	2	∞	2	∞
G_2^*	4	6	3	∞	∞
G_1^*	6	4	5	4	∞

Forward value iteration

Обозначим $C^*(x_k)$ оптимальный путь от x_1 до x_k, который представляет собой первые (k-1) ребер оптимального пути от x_I до x_G ($l_I(x_I) = 0$ и $l_I(x) = \infty$ для $x = x_I$):

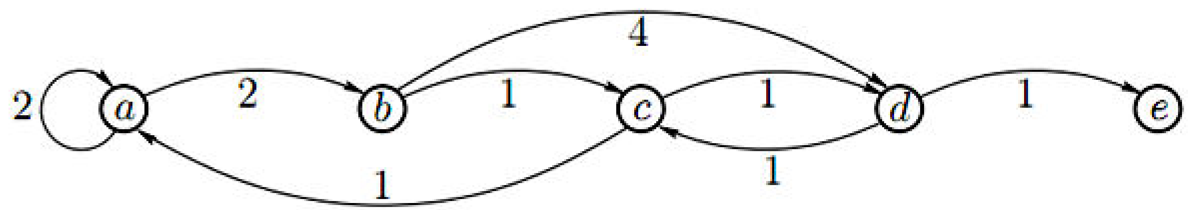
$$C_k^*(x_k) = \min_{u_1,\ldots,u_{k-1}} \left\{ l_I(x_1) + \sum_{i=1}^{k-1} l(x_i, u_i) \right\}$$

Тогда для $C^*(x_k)$ выполняется рекуррентное соотношение:

$$C_k^*(x_k) = \min_{u_k^{-1} \in U^{-1}(x_k)} \left\{ C_{k-1}^*(x_{k-1}) + l(x_{k-1}, u_{k-1}) \right\}$$

где $x_{k-1} = f^{-1}(x_k, u_k^{-1}) \quad u_{k-1} \in U(x_{k-1})$

Forward value iteration



$$C_k^*(x_k) = \min_{u_k^{-1} \in U^{-1}(x_k)} \left\{ C_{k-1}^*(x_{k-1}) + l(x_{k-1}, u_{k-1}) \right\}$$

	a	b	c	d	e
C_1^*	0	∞	∞	∞	∞
C_2^*	2	2	∞	∞	∞
C_3^*	4	4	3	6	∞
C_4^*	4	6	5	4	7
C_5^*	6	6	5	6	5

Время работы O(|V| × |E|)

Bellman–Ford algorithm

```
for v ∈ V
   for i ← 0 to |V| − 1
      do A_vi ← +∞
A_s0 ← 0
for i ← 1 to |V| − 1
   do for (u, v) ∈ E
      if A_vi > A_u,i−1 + w(u, v)
         then A_vi ← A_u,i−1 + w(u, v)
              P_vi ← u
```

Навигационные функции

$$\nabla \phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \quad \cdots \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right]$$

Feedback plan:

$$\pi(x) = -\nabla \phi|_x$$

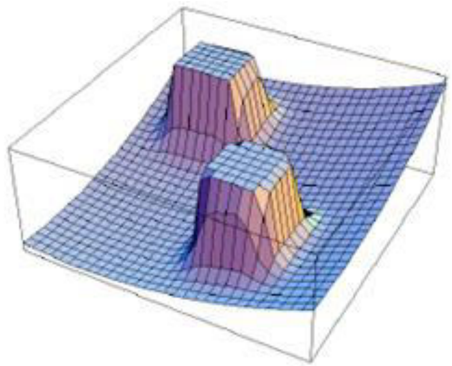


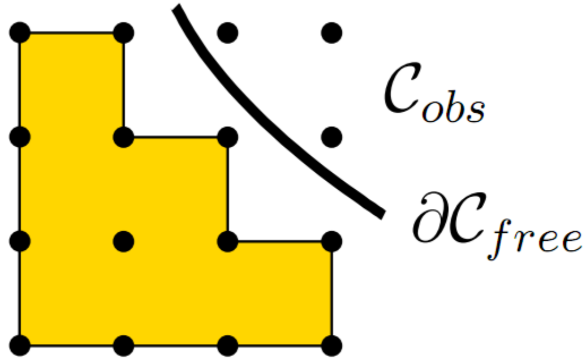
Fig1. Potential function ϕ

В случае предварительного вычисления ϕ,
позволяет быстро строить траекторию из любой начальной точки.

Оптимальные навигационные функции

Расстояние между узлами решетки задается функцией:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k)$$



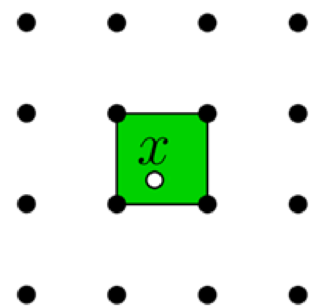
Store G* only over a finite set of sample points and use interpolation to obtain its value at all other points.

Значения в узлах для оптимальной навигационной функции:

$$G_k^*(x_k) = \min_{u_k \in U(x_k)} \left\{ l(x_k, u_k) + G_{k+1}^*(x_{k+1}) \right\}$$

(процесс построения G* в узлах сетки начинается от X_G)

Оптимальные навигационные функции



Linear interpolation:

$$
\begin{aligned}
G^*_{k+1}(x) \approx \quad & \alpha_1\alpha_2 \, G^*_{k+1}(s(i_1, i_2)) + \\
& \alpha_1(1-\alpha_2) \, G^*_{k+1}(s(i_1, i_2+1)) + \\
& (1-\alpha_1)\alpha_2 \, G^*_{k+1}(s(i_1+1, i_2)) + \\
& (1-\alpha_1)(1-\alpha_2) \, G^*_{k+1}(s(i_1+1, i_2+1))
\end{aligned}
$$

Feedback Planning Under Differential Constraints

1. Let X be any C-space or **Phase space**
   X_I, X_G

2. Differential constraints $\dot{x} = f(x,u)$

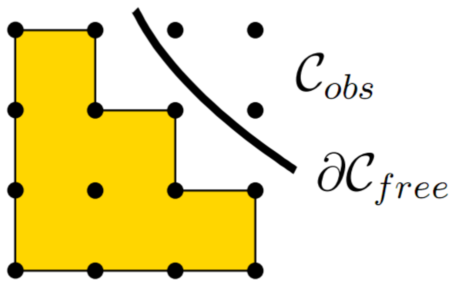
3. An unbounded time interval, $T = [0,\infty)$

4. A feedback plan is defined as a function $\pi : X_{free} \rightarrow U$.
For a given state $x \in X_{free}$, an action $\pi(x)$ is produced.
Composing π with f yields a velocity in $T_x(X)$ given by $\dot{x} = f(x,u)$
Therefore, π defines a vector field on X_{free}.

Cost functional:

$$L(\tilde{x}_{t_F}, \tilde{u}_{t_F}) = \int_0^{t_F} l(x(t), u(t))dt + l_F(x(t_F))$$

Feedback Planning Under Differential Constraints



Рекуррентное соотношение для вычисления G* в узлах сетки в фазовом пространстве:

$$G_k^*(x_k) = \min_{u_k \in U_d} \left\{ l_d(x_k, u_k) + G_{k+1}^*(x_{k+1}) \right\}$$

(процесс построения G* в узлах сетки начинается от X_G)