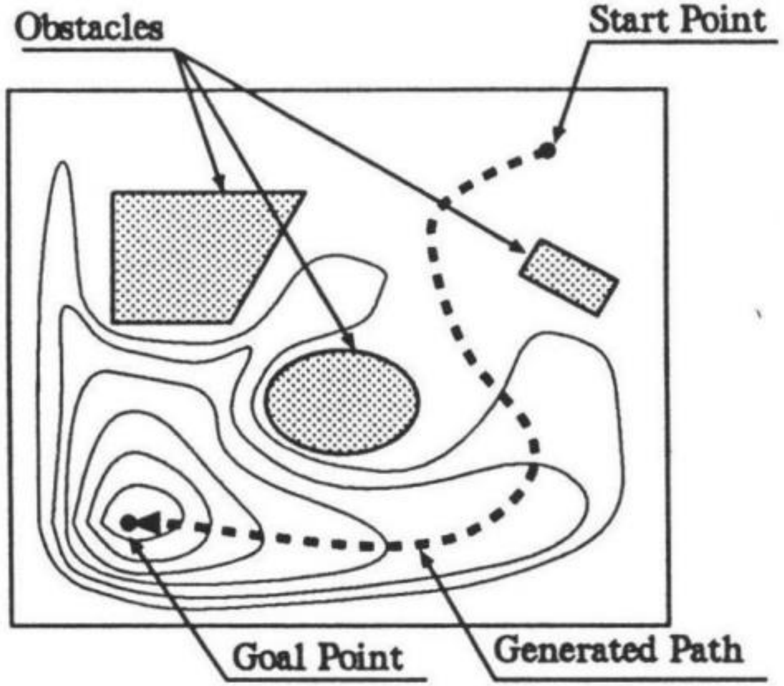
Планирование движения с использованием гармонических функций

Наглядное представление подхода потенциального поля

Путь между начальной и целевой точкой строится путем движения в направлении противоположном градиенту потенциального поля.



Планирование пути

1. Построить численное решение на сетке
2. Выполнить интерполяцию численного решения для получения непрерывного потенциального поля
3. Построить путь

Теория. Принцип максимума.

Гармоническая функция $\varphi \epsilon D$ имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\,\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2} = 0$$

Функция $\varphi \epsilon D$ достигает своего минимума и максимума только на границе. Таким образом, гармоническая функция не может иметь локальных минимумов и максимумов во внутренней области.

Расчет потенциального поля

Дифференциальное уравнение Лапласа можно представить через разностное уравнение следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\Delta\, x}\left(\frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i,j}}{\Delta\, x} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta\, x}\right) + \frac{1}{\Delta\, y}\left(\frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}}{\Delta\, y} - \frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}}{\Delta\, y}\right) = 0$$

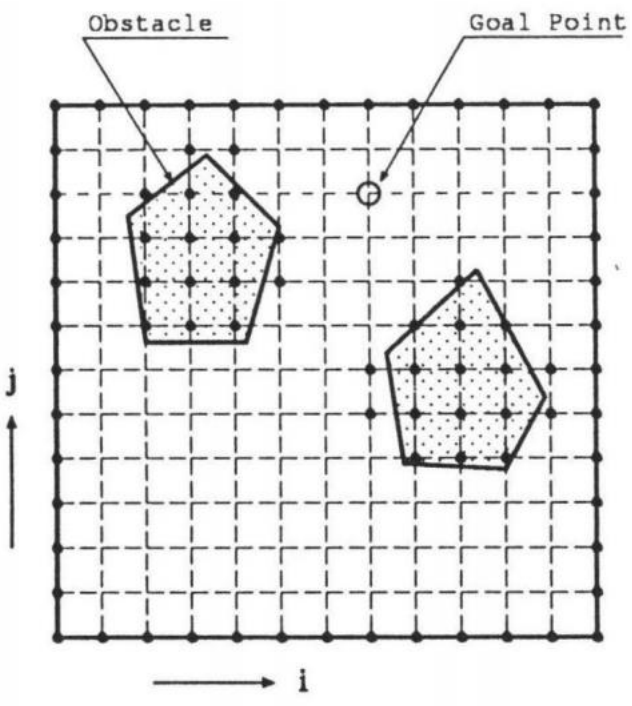
Где $\Delta\, x$,$\Delta\, y$ −размеры шагов, которые будут использоваться при аппроксимации производных в каждом направлении.

Построение потенциального поля

$$\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1} - 4\Phi_{i,j} = 0$$

или

$$\Phi_{i,j} = \frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j} + \Phi_{i-1,j} + \Phi_{i,j+1} + \Phi_{i,j-1}\right)$$



Построение потенциального поля

итерационный метод Гауса-Зейделя

$$\Phi_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{4}\left(\Phi_{i+1,j}^{(n)} + \Phi_{i-1,j}^{(n)} + \Phi_{i,j+1}^{(n)} + \Phi_{i,j-1}^{(n)}\right)$$

где $\Phi_{i,j}^{(n)}$ – численное решение в точке (i, j) за n итераций.

$$\Phi_{i,j} = \begin{cases} 0.0 - \text{покрыта целью} \\ 1.0 - \text{покрыта препятсвием} \end{cases}$$

Непрерывное потенциальное поле

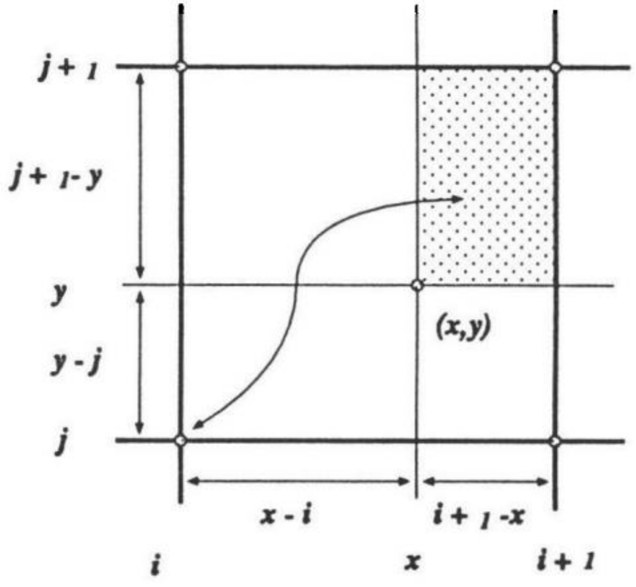
Чтобы получить непрерывное потенциальное поле из дискретного, мы интерполируем дискретное потенциальное поле методом средневзвешенного значения.

$\phi(x, y)_{i,j}$ в точке $(x, y | i \leq x < i + 1, j \leq y < j + 1) -$

$-$ непрерывное потенциальное поле

Непрерывное потенциальное поле

$$\phi(x,y)_{i,j} = \Phi_{i,j}(i+1-x)(j+1-y) + \Phi_{i+1,j}(x-i)(j+1-y)$$
$$+\Phi_{i,j+1}(i+1-x)(y-j) + \Phi_{i+1,j+1}(x-i)(y-j)$$



Поиск пути

Для поиска пути без столкновений в рассчитанном потенциальном поле используется метод наискорейшего спуска:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{s}{l}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n)} - \frac{s}{l}\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Где $l = \left((\partial\phi/\partial x)^2 + (\partial\phi/\partial y)^2\right)^{1/2}$, $x^{(n)}$ и $y^{(n)}$ – координаты n-ой точки пути без столкновения. S – расстояние в один шаг, должно быть меньше, чем интервал точек сетки.