СТУДЕНЧЕСКИЙ ТУРНИР «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БОИ — 2019»

Санкт-Петербург
2019

Министерство образования и науки Российской Федерации
Санкт-Петербургский национальный исследовательский
университет информационных технологий,
механики и оптики
(Университет ИТМО)

СТУДЕНЧЕСКИЙ ТУРНИР «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ БОИ — 2019»

Санкт-Петербург
2019

Турнир «Математические бои — 2019» проводился ОЦМ в период с 25 ноября 2019 г. по 24 декабря 2020 г. К участию в турнире приглашались команды из 6 человек любых специальностей и курсов вузов Санкт-Петербурга. Участвовало 23 команды.

Математический бой – соревнование двух команд в решении математических задач. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение (1 час 30 минут). По истечении отведенного времени начинается собственно бой, когда команды рассказывают друг другу решения задач в соответствии с данными правилами. Если одна из команд рассказывает решение, то другая выступает в качестве оппонента, то есть, ищет в нем ошибки (недочеты). Выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах. Если команды, обсудив предложенное решение, всё-таки не решили задачу до конца или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все) может забрать себе жюри боя. Победителем боя объявляется команда, которая в итоге наберёт большее количество баллов. Победившая команда проходит в следующий тур, а проигравшая - выбывает из соревнований.

Председатель жюри: проф., д.ф.-м.н. Попов И. Ю.

Организационный комитет турнира: Бабушкин М.В., Белолипецкая А.Г., Бойцев А.А., Москаленко М.А., Панкратова Т.Ф., Свеженцев А.Г., Серебрянская Н.А., Трифанов А.И., Трифанова Е.С., Тушавин Г.В.

Составители: Белолипецкая А. Г.

Правила турнира
«Математические бои — 2019»

Общая схема боя

Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказа от вызова – см. пункт "Окончание боя") одна из команд вызывает другую на одну из задач, решение которой еще не рассказывалось (например: "Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8"). После этого, вызванная команда сообщает, принимает ли она вызов, то есть, согласна ли она рассказывать решение этой задачи (на решение о принятии вызова отводится не более одной минуты). Если команда принимает вызов, то она выставляет докладчика, который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет оппонента, обязанность которого - искать ошибки в представленном решении. Если вызов не принят, то команда, которая вызывала, обязана выставить докладчика, а команда, отклонившая вызов, выставляет оппонента. В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова.

Конкурс капитанов

Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное – победил его соперник. При этом что понимается под "правильным решением": просто верный ответ, ответ с объяснением и т. п. - жюри уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в какую-либо игру. Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

Команда имеет право выставить на конкурс капитанов любого члена команды.

Ход раунда

Доклад. В начале раунда докладчик рассказывает решение у доски. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничено 15 минутами, по истечении которых доклад может быть продолжен только с разрешения жюри.

Докладчик может иметь при себе бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями, но не имеет права брать с собой текст решения.

Докладчик имеет право:

- до начала выступления вынести на доску всю необходимую ему информацию;

- не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения; - просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: "Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?");

- отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: а) он не имеет ответа на этот вопрос; б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями б) и в) арбитром в споре выступает жюри.

Докладчик не обязан:

- излагать способ получения ответа, если он может доказать его правильность и полноту;

- сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право попросить повторить часть решения. Он может разрешить докладчику не доказывать какие-либо очевидные факты (со своей точки зрения). После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что вопросов у него нет. Если докладчик не начинает отвечать на вопрос в течение минуты, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может:

- потребовать повторить любую часть доклада;

- попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: а) попросить дать определение любого термина ("Что Вы понимаете под ..."); б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения ("Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ... ");

- попросить доказать сформулированное докладчиком утверждение, если оно не является очевидным или общеизвестным (в спорных случаях, вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, включенные в общеобразовательную программу по математике);

- после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Докладчик и оппонент обязаны:

- высказываться в вежливой и корректной форме, обращаясь к друг другу на "Вы";

- критикуя высказывания друг друга не "переходить на личности";

- повторять и уточнять свои вопросы и ответы по просьбе друг друга или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: а) признать решение правильным; б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и (или) пробелы с обязательным их указанием; в) признать решение (ответ) неправильным, указав ошибки в обоснованиях ключевых утверждений доклада, или приведя контрпример, или указав существенные пробелы в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, то он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как "Можно ли ...? "Верно ли, что ...?"и т. п.), то оппонент имеет право заявить: "Я с решением не согласен, у меня есть контрпример но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (жюри имеет право потребовать предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права изменять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить "Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи не указывая докладчику, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контр примером.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости, оно имеет право вмешаться и ранее, во время диалога докладчика и оппонента.

Выступающие и команда. Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники также могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более шести полуминутных перерывов (см. пункт "Количество выходов к доске").

Перемена ролей. Перемена ролей в раунде может произойти только в том случае, если вызов в этом раунде был принят. Если оппонент доказал, что у докладчика нет решения (так ли это, решает жюри, см. пункт "Начисление баллов") то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит полная перемена ролей, то есть, бывший докладчик становится оппонентом. Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то он получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков ("залатать дыры"). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика решения нет, но собственное решение рассказывать отказался. Если оппонент взялся "латать дыры то происходит частичная перемена ролей: оппонент формулирует, что именно он собирается делать (например: разбирать случай, не разобранный докладчиком; доказывать утверждение, недоказанное докладчиком; и т. п.), а бывший докладчик ему оппонирует.

Обратной перемены ролей не происходит ни в каком случае!

Корректность вызова. Если вызов принят, то вопрос о его корректности не ставится, то есть, принятый вызов всегда считается корректным!

Если вызов не принят, то возможны два случая:

а) вызывавшая команда также отказалась отвечать, и тогда, вызов "автоматически"признается некорректным;

б) вызывавшая команда выставила докладчика, тогда корректность вызова зависит от дальнейшего хода раунда, а именно, вызов признается некорректным, если оппоненту удается доказать, что задача не решена. В случае, если оппонент признал задачу решенной, вызов "автоматически"признается корректным!

Количество выходов к доске

Каждый член команды имеет право выйти к доске один раз в качестве докладчика и один раз в качестве оппонента. Команда имеет право не более трех раз за бой заменять докладчика или оппонента, причем в каждом таком случае выход засчитывается обоим членам команды. При каждой замене, время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на одну минуту (эту минуту можно как использовать непосредственно перед заменой, так и не использовать. В последнем случае команда соперников тоже не имеет права ее использовать).

Порядок вызовов. Окончание боя

В случае, если вызов был признан некорректным, команда должна в следующем раунде повторить вызов. Во всех остальных случаях команды вызывают друг друга поочередно.

В любой момент боя та команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, а делать вызов, который может оказаться некорректным, она не рискует). Тогда, другая команда получает право (но не обязана) рассказать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей). Бой заканчивается, когда все задачи обсуждены или когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Начисление баллов

Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если оппонент сумел найти в решении более или менее существенные ошибки, жюри прежде всего решает вопрос о том, удалось ли оппоненту доказать, что задача докладчиком не решена. Если это оппоненту не удалось, то он, тем не менее, может получить баллы за оппонирование в зависимости от серьезности указанных недочетов и от того, насколько докладчику (или оппоненту, если произошла частичная перемена ролей) удалось их исправить. Как правило, оппонент получает половину "стоимости"не "залатанных"докладчиком "дыр"в решении (принцип "половины"), но, если докладчик сумел изложить полное решение только после существенных наводящих вопросов оппонента и (или) жюри ("грязь"в решении), то жюри может отобрать у докладчика не более двух баллов и передать их оппоненту или оставить себе. Если же произошла частичная перемена ролей, то бывший оппонент получает дополнительно баллы за доказательство сформулированных им предварительно утверждений, а бывший докладчик - за их оппонирование (при этом "стоимость"рассматриваемых утверждений определяет жюри, а распределение баллов происходит так же, как при оппонировании полного решения – с учетом принципа "половины"и "грязи"в рассуждениях). Остальные баллы распределяются между докладчиком и жюри, и раунд заканчивается. Если же оппонент сумел доказать, что решения у докладчика нет, он получает баллы за оппонирование (с учетом принципа "половины") и, если вызов был принят, право рассказать свое решение (см. пункт "Перемена ролей"). Если при этом происходит полная или частичная перемена ролей, то начисление баллов происходит по схеме, изложенной выше.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он нашел эти недостатки сам. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае состоит из одной фразы: "У Вас нет решения"), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

В случае проверки корректности вызова и признания его некорректным команда, проверявшая корректность, получает 6 баллов (даже если решение задачи вообще не обсуждалось). За оппонирование команда получает не более 6 баллов.

Капитан

Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т. д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала боя.

Во время решения задач главная обязанность капитана - координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан с учетом пожеланий членов команды распределяет между ними задачи для решения, следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче, определяет тактику команды на предстоящем бое.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении в ходе боя перерывов на 5-10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между раундами. При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

Жюри

Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет на доске протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием председателя жюри. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда изменен быть не может.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски. Жюри обязано мотивировать все свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

Список команд–участников турнира

1. 2 балла

Капитан: Базько Арина Михайловна.

Члены команды: Базько Арина Михайловна, Егорова Юлия Сергеевна, Калинин Виктор Михайлович, Козло Кирилл Константинович, Оловенцева Ольга Ивановна, Череповицкий Александр Владиславович .

2. ComplexBadJoke

Капитан: Туманова Полина Дмитриевна .

Члены команды: Диковицкий Виталий, Ларин Владислав, Сергей Смирнов, Никита Баранов, Даниил Самойлов, Туманова Полина .

3. Gorillas

Капитан: Малоглазов Илья Евгеньевич.

Члены команды: Горбунов Константин, Заграничный Александр, Абакумов Семён .

4. Lenny

Капитан: Порсев Егор Валерьевич.

Члены команды: Егор Валерьевич Порсев, Русских Алексей Алексеевич, Степан Павлович Покатов, Дмитрий Андреевич Потапов .

5. Y-men

Капитан: Торопова Дарья Александровна.

Члены команды: Торопова Дарья, Айза Тарасова, Владислав Симонов, Ольга Шереметьева, Ирина Птухина .

6. Бишки

Капитан: Победенная Александра Сергеевна.

Члены команды: Иванов Артем Евгеньевич, Лебедь Дарья Александровна, Мещеряков Никита Михайлович, Победенная Александра Сергеевна, Рулев Никита Александрович, Усачева Елизавета Андреевна .

7. Восток-1

Капитан: Егоров Мичил Прокопьевич.

Члены команды: Никитина Снежана, Иннокеньев Артем, Решетников Алексей, Кривошапкина Айталина, Босоева Эльвира, Егоров Мичил .

8. Департамент Анализа Данных

Капитан: Кабанова Екатерина Владимировна.

Члены команды: Кабанова Екатерина, Аганов Артур, Морозов Владимир, Рыбкин Никита, Кравченко Александр, Садовников Александр .

9. Инверсированная комплексная пельмешка

Капитан: Исаева Светлана Александровна.

Члены команды: Исаева Светлана, Бондаренко Марина, Ужегова Софья, Кудрявцева Маргарита, Рябова Мария .

10. Интернациональный флекс

Капитан: Каримов Азат Дамирович.

Члены команды: Каримов Азат Дамирович, Нургазин Мадияр Кайратович, Толепбек Темирлан Серикович, Хакимов Мухаммаджон Рахматджонович, Тихонов Роман Евгеньевич, Жуков Захар Сергеевич .

11. Канторово ничтожество

Капитан: Фофанов Кирилл Алексеевич.

Члены команды: Печёнкина Маргарита, Сарычев Павел, Леонтьев Илья, Фофанов Кирилл, Павлова Дарья, Рулли Надежда .

12. Лапки аметиста

Капитан: Машина Екатерина Алексеевна.

Члены команды: Машина Екатерина, Наумова Надежда, Бострикова Дарья, Мельников Игорь, Доморацкий Эридан .

13. Математические $\psi\chi$

Капитан: Сошенко Александр Александрович.

Члены команды: Сошенко Александр Александрович, Покатилов Артём Сергеевич, Ульянов Владимир Дмитриевич, Назаров Алексей Игоревич, Куцый Илья Максимович, Кладницкий Данил Максимович .

14. Многочлен

Капитан: Никитин Михаил Николаевич.

Члены команды: Щетинский Петр Андреевич, Овчинников Виктор Алексеевич, Клименко Алексей Сергеевич, Куц Никита Денисович, Коверин Анатолий .

15. Недоматематики

Капитан: Хомич Иван Владимирович.

Члены команды: Хомич Иван Владимирович, Жарлыкасинова Танзиля Буранбаевна, Неретина Кристина Андреевна, Волков Глеб Геннадьевич, Сизов Роман Ренадович, Давыденко Владислав Сергеевич .

16. НП

Капитан: Прядкин Александр Олегович.

Члены команды: Никонов Владимир, Угольников Стас, Колосков Богдан, Голиш Максим, Зябирова Алина .

17. ОЖВВ

Капитан: Агеев Роман Сергеевич.

Члены команды: Агеев Роман Сергеевич, Иванова Александра Александровна, Должанский Ян Сергеевич, Георгий Левашов Игоревич, Гнатюк Дмитрий Вячеславович, Скаженик Тарас Михайлович .

18. первое место

Капитан: Дорофеева Арина Дмитриевна.

Члены команды: Дорофеева Арина, Патка Марк, Чистяков Александр, Кузнецов Вадим, Новиков Илья, Харченко Максим .

19. Подруги Эйлера

Капитан: Степанова Надежда Юрьевна.

Члены команды: Степанова Надежда Юрьевна, Гуторова Полина Сергеевна, Дуболазова Виктория Владиславовна, Красногляд Яна Алексеевна, Дубовская Дарья Сергеевна, Нилина Надежда Юрьевна .

20. Пожарники

Капитан: Миронец Сергей.

Члены команды: Миронец Сергей, Шмарина Людмила, Ершов Михаил, Пантелеев Ярослав, Гридинарь Николай, Тарасов Денис .

21. Ретракция шара на сферу

Капитан: Имешкенов Георгий Александрович.

Члены команды: Имешкенов Георгий, Кличук Илья, Рычков Дмитрий, Культипирова Дана, Выборнова Александра, Пирожков Александр .

22. С приветом

Капитан: Бородин Дмитрий Владимирович.

Члены команды: Бородин Дмитрий Владимирович, Голубева Яна Александровна, Ковальчук Владимир Сергеевич, Нечаева Татьяна Андреевна, Подолина Екатерина Юрьевна, Шафеев Тимур Рустамович .

23. Узнавшие

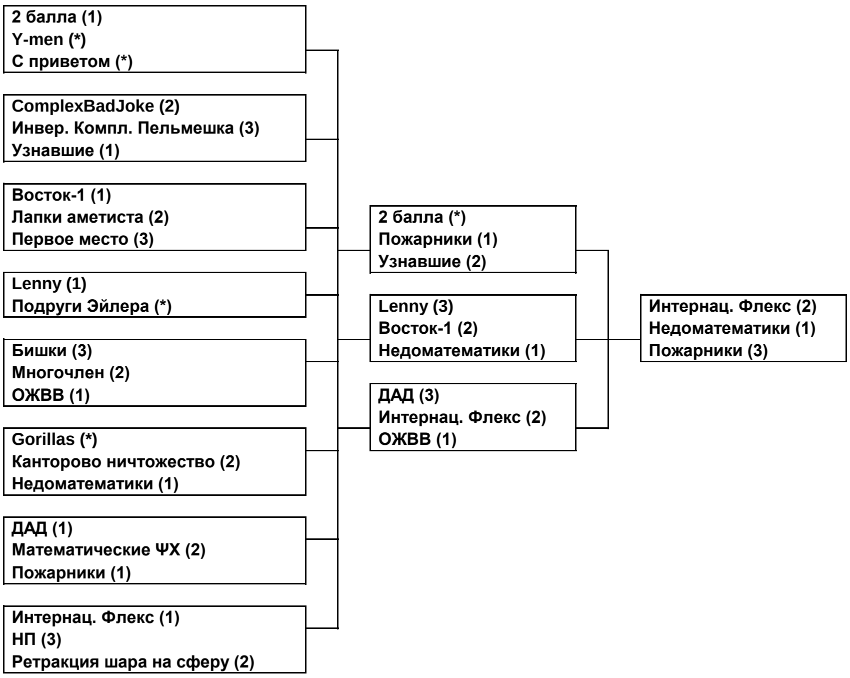
Капитан: Мигунов Степан Андреевич.

Члены команды: Кукушкин Виктор Сергеевич, Семина Анастасия Дмитриевна, Воронцов Леонид Юрьевич, Шварев Артур Алексеевич, Степанов Михаил Владимирович, Мигунов Степан Андреевич .

Результаты и ход турнира

Первое место: «Недоматематики»
Второе место: «Интернациональный флекс»
Третье место: «Пожарники»

* — техническое поражение



I тур. «ComplexBadJoke» VS «Инверсированная комплексная пельмешка» VS «Узнавшие»

Условия задач

1. Известно, что для некоторых чисел $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ верно следующее соотношение: $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b + \operatorname{arctg} c + \operatorname{arctg} d = \pi$. Докажите, что тогда числа a, b, c, d удовлетворяют следующему соотношению:

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

2. Найдите все значения n, для которых число $7^n + 3 \cdot n - 1$ делится на 9.

3. Решите уравнение $f^{\circ 2021}(x) = f^{\circ 2019}(x)$, где $f(x) = 3x - 1$. Запись $f^{\circ k}$ обозначает композицию функции, например $f^{\circ 2}(x) = f(f(x))$.

4. Вписанный четырехугольник называется гармоническим, если произведения длин его противоположных сторон равны. Докажите, что в гармоническом четырехугольнике каждая диагональ делится точкой их пересечения в отношении, равном отношению квадратов длин прилежащих к этой диагонали сторон данного четырехугольника.

5. На плоскости отмечено 2019 точек общего положения (никакие три из данных точек не лежат на одной прямой): 1 белая точка и 2018 черных. Докажите, что количество треугольников с вершинами в черных точках, внутри которых расположена белая точка, четно.

6. В очереди стоит 2019 человек. Известно, что в этой очереди нет двух людей одного роста. Назовем пару людей (необязательно стоящих друг за другом) из очереди убывающей, если человек с более высоким ростом стоит раньше человека с более низким ростом, в противном случае будем называть эту пару людей возрастающей. Характеристикой очереди будет называть число убывающих пар в этой очереди. Докажите, что для любого целого числа $0 \leqslant k \leqslant 2019 \cdot 1009$ существует очередь с характеристикой k.

Результаты боя

№ задачи		A Complex Bad Joke	B Узнавшие	C Инверсированная комплексная пельмешка	Жюри
4	A $\to$ B	0	12	0	0
1	B $\rightleftarrows$ C	0	11	1	0
2	C $\to$ A	12	0	0	0
3	A $\to$ B	0	12	0	0
6	B $\to$ C	0	0	12	0
5	C $\rightleftarrows$ A	6	0	0	6
Итог:		**18**	**35**	**13**	

Решения

1. Введем вспомогательные обозначения: $\alpha = \operatorname{arctg} a, \beta = \operatorname{arctg} b, \gamma = \operatorname{arctg} c, \delta = \operatorname{arctg} d$. Так как множество значений функции $\operatorname{arctg} x$ является интервал $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Заметим, что если нельзя из этих четырех чисел выбрать два таким образом, что их сумма была бы не равна $\frac{\pi}{2}$, то единственным возможным вариантом является следующая ситуация $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{4}$. Заметим, что в этой ситуации условие задачи выполняется. В дальнейшем данную ситуацию больше не будем рассматривать. Таким образом, в оставшихся вариантах всегда существует пара чисел, сумма которых не равна $\frac{\pi}{2}$, и как следствие, сумма двух оставшихся чисел также не равна $\frac{\pi}{2}$. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha+\beta$ не равно $\frac{\pi}{2}$. Произведем следующие вычислительные действия:

$$0 = \operatorname{tg}(\pi) = \operatorname{tg}((\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\gamma+\delta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}(\gamma+\delta)-1}.$$

Так как $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, то продолжим вычислять полученное выражение:

$$0 = \frac{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1} + \frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta-1}}{\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-1}\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta-1}-1}.$$

Так как $\alpha = \operatorname{arctg} a, \beta = \operatorname{arctg} b, \gamma = \operatorname{arctg} c, \delta = \operatorname{arctg} d$, то

$$0 = \frac{\frac{a+b}{ab-1}+\frac{c+d}{cd-1}}{\frac{a+b}{ab-1}\frac{c+d}{cd-1}-1} = \frac{(a+b)(cd-1)+(c+d)(ab-1)}{(a+b)(c+d)-(ab-1)(cd-1)},$$

откуда получаем, что $(a+b)(cd-1)+(c+d)(ab-1) = 0$, то есть $a+b+c+d = ab(c+d)+cd(a+b)$ или (так как $a,b,c,d \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$)

$$\frac{a+b+c+d}{abcd} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

что и требовалось доказать.

□

2. Докажем, используя метод математической индукции, что для любого натурального n число 7^n+3n-1 делится на 9. База: проверим, что при $n=1$ число 7^n+3n-1 делится на 9. Действительно, число $7^1+3-1=9$ делится на 9. Переход: предположим, что для некоторого n утверждение верно, докажем, что тогда оно верно и для $n+1$. Рассмотрим число

$$7^{n+1}+3\cdot(n+1)-1 = 7\cdot(7^n+3n-1)-9\cdot(2n+1).$$

Это число делится на 9, так как первое слагаемое делится на 9 по индукционному предположению, и второе слагаемое также делится на 9. Индукционный переход доказан. Таким образом, мы доказали, что число 7^n+3n-1 делится на 9 для любого натурального n. $\square$

3. Дана функция $f(x)=3x-1$, заметим, что у этой функции на всей оси существует обратная функция $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$. Рассмотрим исходное уравнение, которое необходимо решить: $f^{\circ 2021}(x)=f^{\circ 2019}(x)$. Возьмем от обеих частей обратную функцию $f^{-1}(x)$ 2019 раз, получим следующее: $f^{\circ 2}(x)=x$, то есть $f(f(x))=x$,то есть $3\cdot(3x-1)-1=x$, значит,$x=\frac{1}{2}$. Таким образом, единственным корнем исходного уравнения является число $\frac{1}{2}$. $\square$

4. Назовем четырехугольник из условия $ABCD$, точку пересечения диагоналей за O, обозначим длины сторон следующим образом: $AB=a, BC=b, CD=c, DA=d, OA=x, OB=z, OC=y, OD=t$. Тогда из условия, что $ABCD$ гармонический четырехугольник, следует, что $ac=bd$, это значит, что $\frac{d^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$, поэтому достаточно доказать, что $\frac{x}{y}=\frac{d^2}{c^2}$. Так как $ABCD$ вписанный четырехугольник, то треугольники AOD, BOC подобны по трем углам, откуда следует, что $\frac{x}{z}=\frac{t}{y}=\frac{d}{b}$, а значит, $x=\frac{dz}{b}$. Так как $ABCD$ вписанный четырехугольник, то треугольники AOB, COD подобны по трем углам, откуда следует, что $\frac{z}{y}=\frac{x}{t}=\frac{a}{c}$, а значит, $y=\frac{cz}{a}$. Вычислим отношение $\frac{x}{y}=\frac{\frac{dz}{b}}{\frac{cz}{a}}=\frac{ad}{bc}=\frac{d\cdot\frac{bd}{c}}{bc}=\frac{d^2}{c^2}$, что и требовалось доказать. $\square$

5. Докажем более общее утверждение, что если черных точек не 2018, а $2n$, то тогда условие задачи также будет верным. Докажем по индукции. База $n=1$, получается 0 треугольников, 0 - четное число. Переход, предположим, что для n условие задачи верно, докажем его для $n+1$. Так как общее количество точек - это некоторое конечное число, то всегда можно выбрать две черные точки A, B таким образом, что все остальные точки будут находится в одной полуплоскости относительно прямой AB. Обозначим белую точку за точку O. По индукционному предположению, для $2n$ черных точек количество треугольников, содержащих точку O четное число, поэтому достаточно доказать, что количество треугольников, хотя бы одна из вершин которого является точкой A или B, содержащих точку O, также четное число. Не теряя общности можно считать, что все точки находятся в нижней полуплоскости относительно прямой AB. Обозначим за a - количество черных точек, расположенных внутри треугольника AOB, за b - количество черных точек, которые находятся в правых полуплоскостях относительно прямых OA, OB. Обозначим за d - количество черных точек, которые находятся в левых полуплоскостях относительно прямых OA, OB, за c - все оставшиеся точки (они расположение в левой полуплоскости относительно прямой OA и в правой полуплоскости относительно прямой OB). Заметим, что количество треугольников, содержащих точку O, вершинами которого являются точки A, B, равно c. Также будут подходить следующие треугольники: одна из вершин - точка A, одна вершина находится в области, в которой b черных точек, третья вершина находится в области, в которой c черных точек. Аналогично для точки B добавится еще $c\cdot d$ треугольников. Осталось рассмотреть два случая. Первый случай: одна из вершин, назовем ее X, находится в области, в которой d точек, вторая из вершин, назовем ее Y, находится в области, в которой b точек. Заметим, что если треугольник AXY содержит точку O, значит, и треугольник BXY содержится точку O. И наоборот. Таким образом, общее количество треугольников такого вида будет четным числом, поэтому в дальнейшем это число можно не учитывать. Второй случай: одна из вершин, назовем ее X, находится в области, в которой a точек, вторая из вершин, назовем ее Y, находится в области, в которой c точек. Проведем прямую XY: если точка O расположена в левой полуплоскости относительно этой прямой, то треугольник AXY содержит точку O, а треугольник BXY не содержит. Аналогично если точка O расположена в правой полуплоскости относительно прямой XY, то треугольник BXY содержит точку O, а треугольник AXY не содержит. Таким образом, общее количество треугольников такого вида, которые удовлетворяют условию, будет $a \cdot c$. Таким образом, общее количество треугольников, влияющих на четность, увеличилось на $c + c \cdot b + c \cdot d + a \cdot c = c \cdot (a + b + d + 1) = c \cdot (2n - c + 1)$. Заметим, что если c - четное число, то четным будет первый множитель, если c - нечетное число, то четным будет второй множитель, а значит, индукционный переход доказан. Таким образом, количество треугольников с вершинами в четных точках, внутри которых расположена белая точка, будет четным числом, что и требовалось доказать. $\square$

6. Предположим, что в очереди стоит n людей. Расставим людей по возрастанию. Самому маленькому по росту человеку присвоим номер 1, следующему номер 2, и так далее, у самого высокого человека будет номер n. Будем их расположение обозначать следующим образом $(1, 2, ..., n)$. Докажем по индукции, что данная задача верна не только для числа 2019, но и для любого натурального $n > 1$, при условии, что $0 \leqslant k \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. База: $n = 2$, для $k = 0$ подходит вариант $(1, 2)$, для $k = 1$ подходит вариант $(2, 1)$. Переход, предположим, что утверждение верно для n, докажем, что тогда оно верно и для $n + 1$. Рассмотрим следующую очередь $(1, 2, ..., n, n + 1)$. Эта очередь имеет характеристику 0. Теперь за каждый шаг будем двигать человека $n+1$ налево на одного человека (менять местами с его левым соседом). После первого хода получится очередь $(1, 2, ..., n - 1, n + 1, n)$ с характеристикой 1. Будем продолжать так делать, пока самый высокий человек не окажется на первом месте. За каждый такой шаг к характеристике очереди будет добавляться число 1 (так как убывающими парами будут только пары из человека $n + 1$ и всех людей, стоящих справа от него). Таким образом, за такой проход мы перешли от очереди $(1, 2, ..., n, n + 1)$ с характеристикой 0 к очереди $(n+1, 1, 2, ..., n)$ с характеристикой n, реализовав в процессе прохода очередь для каждого значения характеристики очереди $0 < k < n$. По индукционному предположению, для очереди из n человек и для каждого $0 \leqslant k \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$ существует очередь из n человек с характеристикой k. Из этого следует, что для очередей из $n + 1$ человека, где самый высокий человек стоит на первом месте, и для любого k_0: $n \leqslant k_0 = n + k \leqslant n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ существует очередь с характеристикой k_0. Таким образом, индукционный переход доказан, а значит, для любых n человек разного роста ($n > 1$) существует очередь с характеристикой k, где $0 \leqslant k \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$. Таким образом, задача доказана. $\square$

I тур. «Восток-1» VS «Лапки аметиста» VS «Первое место»

Условия задач

1. Докажите, что система $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = a \\ 3x^2y - y^3 = b \end{cases}$ имеет ровно три вещественные пары решений, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $ab \neq 0$.

2. По кругу расставили числа от 1 до 40. Число называется хорошим, если оно делится на число, стоящее слева от него. Какое наибольшее количество чисел может оказаться хорошими?

3. Найдите кратность корня 1 многочлена

$$P(x) = x^{2020} - 1010 \cdot x^{1011} + 1010 \cdot x^{1009} - 1.$$

4. Площадь правильного шестиугольника МАТБОЙ равна 2019. Найдите площадь фигуры, образованной при пересечении треугольников ТОМ и БАЙ.

5. Можно ли квадрат 10×10 разрезать на тетрамино (фигурки из четырех клеток) в виде буквы Г?

6. Вычислите следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} -2019 & 2 & 3 & \dots & 2019 \\ 1 & -2018 & 3 & \dots & 2019 \\ 1 & 2 & -2017 & \dots & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Результаты боя

№ задачи		A Первое место	B Лапки аметиста	C Восток-1	Жюри
5	A $\to$ B	0	12	0	0
6	B $\to$ C	0	0	11	1
1	C $\rightleftarrows$ A	1	0	6	5
3	A $\rightleftarrows$ B	0	6	0	6
4	B $\to$ C	0	0	12	0
2	C $\rightleftarrows$ A	0	0	12	0
Итог:		**1**	**18**	**41**	

Решения

1. Рассмотрим комплексное число $z = x + iy$, где x, y - некоторые вещественные числа. Возведем число z в куб, получим следующее:

$$z^3 = x^3 + 3x^2yi - 3x^2y - y^3i,$$

то есть вещественная и мнимая части равны следующему: $Re(z^3) = x^3 - 3x^2y = a, Im(z^3) = 3x^2y - y^3 = b$. Так как по условию a и b не равны 0, то z также не равно 0, а значит, решения исходной системы являются вещественной и мнимой частями кубического корня из комплексного числа $w = a + ib$, а значит, существует ровно 3 вещественных решения исходной системы. □

2. По условию задачи число является хорошим, если оно делится на число, стоящее справа от него. Так как по кругу стоят числа от 1 до 40, то справа от хорошего числа стоит число, которое хотя бы в 2 раза больше. Так как максимальное число в круге - это число 40, то хорошее число не может быть больше 20, это значит, что хороших чисел не может быть больше 20. Приведем пример, что 20 хороших чисел может быть: 38, 19, 34, 17, 30, 15, 26, 13, 22, 11, 36, 18, 9, 28, 14, 7, 40, 20, 10, 5, 24, 12, 6, 3, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 39, 37, 35, 33, 31, 29, 27, 25, 23, 21. Таким образом, наибольшее количество хороших чисел - 20. □

3. Если число x_0 является корнем кратности k некоторого многочлена $f(x)$, то это равносильно тому, что $f(x_0) = f'(x_0) = ... = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ и $f^k(x_0)$ не равно 0. Воспользуемся этим фактом:

$$P(1) = 1 - 1010 + 1010 - 1 = 0,$$

$$P'(x) = 2020x^{2019} - 1010 \cdot 1011x^{1010} + 1010 \cdot 1009x^{1008},$$

$$P'(1) = 2020 - 1010 \cdot 1011 + 1010 \cdot 1009 = 0,$$

$$P''(x) = 2020 \cdot 2019x^{2018} - 1010 \cdot 1011 \cdot 1010x^{1009} + 1010 \cdot 1009 \cdot 1008x^{1007},$$

$$P''(1) = 1010 \cdot (2 \cdot 2019 - 1010 \cdot 1011 + 1009 \cdot 1008),$$

$$P'''(x) = 2020 \cdot 2019 \cdot 2018x^{2017} - 1010^2 \cdot 1011 \cdot 1009x^{1008} + 1010 \cdot 1009 \cdot 1008 \cdot 1007x^{1006},$$

$$P'''(1) = 1010 \cdot (2 \cdot 2019 \cdot 2018 - 1010 \cdot 1011 \cdot 1009 + \cdot 1009 \cdot 1008 \cdot 1007).$$

Нетрудно заметить, что $P'''(1)$ не равно 0, можно либо просто вычислить это значение, либо заметить, что выражение в скобках не делится на 4 (так как первое и последнее слагаемое делится на 4, а второе - нет), а значит, не может быть равно 0. Таким образом, кратность корня равна 3. □

4. Так как шестиугольник МАТБОЙ является правильным, то треугольник ТОМ является равносторонним со стороной $TM = a\sqrt{3}$, где a - сторона правильного шестиугольника МАТБОЙ, так как треугольник ATM является равнобедренным с углом при вершине равным 120 градусам. Таким образом, можно вычислить следующую площадь $S(TOM) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Обозначим пересечения диагоналей АБ и МТ за точку В, пересечение диагоналей АЙ и МТ за точку С. Так как МАТБОЙ правильный шестиугольник, то углы МАС, АМС, ВАТ, ВТА равны 30 градусам, значит, угол САВ равен 60 градусам, то есть треугольник АВС является равносторонним и $AB = \frac{TM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Можно вычислить площадь треугольника АВС: $S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. Таким образом, площадь фигуры, которую необходимо было вычислить, равна следующему: $S_0 = S(TOM) - 3S(ABC) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Осталось найти, чему равна сторона шестиугольника. Вычислим, чему равна площадь треугольника АТМ: $S(ATM) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, так как треугольник ATM является равнобедренным с углом при вершине равным 120 градусам. Нам известно, что его площадь равна 2019, то есть $2019 = S(TOM) + 3S(ATM) = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, откуда получаем, что $a^2 = \frac{1346}{\sqrt{3}}$, и, следовательно, $S_0 = 673$. □

5. Нельзя. Докажем задачу от противного, предположим, чо можно. Раскрасим нашу доску в два цвета следующим образом: столбцы с нечетным номером будут черного цвета, столбцы с четными номерами будут белого цвета. При такой раскраске фигурки из четырех клеток в виде буквы Г будут двух видов: первый вид - фигурка с 3 черными клетками и одной белой, второй вид - фигурка с 3 белыми клетками и одной черной. Обозначим количество фигурок первого вида за a, количество фигурок второго вида за b. Так как всего 100 клеток, то фигурок должно быть 25, то есть $a + b = 25$. С другой стороны посчитаем количество черных и белых клеток через a и b. Получим, что черных клеток $50 = 3a + b$, а белых клеток $50 = a + 3b$. Но тогда получаем, что $2a = 25, 2b = 25$, чего не может быть, так как a, b - некоторые неотрицательные целые числа. Противоречие. Таким образом, мы доказали, что разрезать доску нельзя. □

6. Обозначим следующий определитель за A:

$$A = \begin{vmatrix} -2019 & 2 & 3 & ... & 2019 \\ 1 & -2018 & 3 & ... & 2019 \\ 1 & 2 & -2017 & ... & 2019 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки вторую, из второй третью, из третьей четвертую и так далее, получим следующее:

$$A = \begin{vmatrix} -2020 & 2020 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -2020 & 2020 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -2020 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2 & 3 & ... & -1 \end{vmatrix}.$$

Прибавим первый столбец ко второму, после этого новый второй столбец прибавим к третьему и так далее, получим следующее:

$$A = \begin{vmatrix} -2020 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -2020 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -2020 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 3 & 6 & ... & (1+2+...+2018-1) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, получаем, что

$$A = (-2020)^{2018} \cdot (\frac{2019 \cdot 2018}{2} - 1) = -2020^{2018} \cdot (2019 \cdot 1009 - 1).$$

□

I тур. «Бишки» VS «Многочлен» VS «ОЖВВ»

Условия задач

1. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга коней можно расставить на шахматной доске?

2. Положительное число x удовлетворяет следующему соотношению:

$$[x] \cdot \{x\} = 2019.$$

Найдите, чему может быть равно следующее число: $[x^2] - [x]^2$, где $[x]$ - целая часть числа x, $\{x\}$ - дробная часть числа x.

3. У инопланетян в алфавите есть только две буквы: A и B. Смысл слова в этом языке не меняется при следующих заменах: BAB - AA, BAA - AB, AAB - BA, AAA - BB (замену можно делать в любом месте слова). Являются ли в этом языке слова ABB и BAA синонимами.

4. Дан правильный пятиугольник со стороной a. Найдите периметр фигуры, вершинами которой являются точки пересечения диагоналей данного пятиугольника.

5. Пусть $x_1, x_2, ..., x_{2019}$ - корни уравнения $x^{2019} - x - 1 = 0$. Найдите, чему равно следующее выражение: $x_1^{2020} + x_2^{2020} + ... + x_{2019}^{2020}$.

6. Найдите, чему равна следующая сумма: $\sum\limits_{k=1}^{2019} \frac{1}{k^2+5k+4}$.

Результаты боя

№ задачи		A Многочлен	B ОЖВВ	C Бишки	Жюри
5	A → B	0	12	0	0
4	B → C	0	2	10	0
1	C → A	10	2	0	0
6	A → B	0	12	0	0
2	B → A	12	0	0	0
3	A → B	0	12	0	0
Итог:		**22**	**40**	**10**	

Решения

1. Докажем, что ответ в задаче 32. Приведем пример, что 32 расставить можно, например, следующим образом: поставим коней на все черные клетки (при условии, что доска раскрашена в шахматную раскраску). Так как при такой раскраске конь не может бить коня, который стоит на клетке того же цвета, то данный пример удовлетворяет условию задачи. Докажем теперь, что больше 32 коней расставить нельзя. Разобьем всю нашу доску на прямоугольники размера 2×4. Всего таких прямоугольников 8, поэтому достаточно доказать, что в таком прямоугольнике нельзя расставить больше 5 коней. Действительно, все клетки такого прямоугольника разбиваются на пары ходом коня, это значит, что если два коня стоят на клетках в паре, то они бьют друг друга. Так как всего клеток в таком прямоугольнике 8, то тогда количество пар - 4, из чего следует, что расставить 5 коней, которые не бьют друга друга, в таком прямоугольнике по принципу Дирихле нельзя. □

2. По условию задачи необходимо найти значение следующего выражения $[x^2] - [x]^2$, обозначим его за A. Тогда, так как $x = [x] + \{x\}$, то

$$A = [[x]^2 + 2[x]\{x\} + \{x\}^2] - [x]^2 =$$

$$= [[x]^2 + 2 \cdot 2019 + \{x\}^2] - [x]^2 = [x]^2 + 2 \cdot 2019 - [x]^2 = 2 \cdot 2019 = 4038,$$

так как $0 \leqslant \{x\} < 1$, и следовательно, $0 \leqslant \{x\}^2 < 1$. □

3. Заметим, что у синонимов всегда одинаковая четность количества букв В. Следовательно, слова АВВ и ВАА не являются синонимами, так как четность количества букв В у них разная. □

4. Обозначим правильный пятиугольник за $ABCDE$, пересечения диагоналей обозначим следующим образом: $AC \cap BE = F, BD \cap AC = G, CE \cap BD = H, AD \cap CE = I, BE \cap AD = J$. Так как пятиугольник правильный, то все углы равны $\frac{\pi}{5}$. Заметим, что треугольники ABC, BCD, CDE, DEA, EAB равны между собой по первому признаку и являются равнобедренными, откуда получаем, что треугольники ABF, BCG, CDH, DEI, EAI равны между собой по второму признаку и являются равнобедренными. Откуда получаем, что $FG = GH = HI = IJ = JF = x$. Рассмотрим треугольник ABC, так как угол B равен $\frac{\pi}{5}$ и сторона $AB = BC = a$, то тогда сторона $AC = 2a\cos\frac{\pi}{5}$. Рассмотрим треугольник ABF, так как угол BAF равен углу ABF и равен $\frac{\pi}{5}$, а сторона $AB = a$, то тогда сторона $AF = \frac{a}{2\cos\frac{\pi}{5}}$. Таким образом, получаем, что $x = 2a\cos\frac{\pi}{5} - \frac{a}{\cos\frac{\pi}{5}} = a\frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}$, и, следовательно, периметр равен $P = 5a\frac{2\cos\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}$. □

5. Заметим, что если x_k корень, следовательно, $x_k^{2019} - x_k - 1 = 0$. Домножим обе части равенства на x_k, получим следующее: $x_k^{2020} - x_k^2 - x_k = 0$, то есть $x_k^{2020} = x_k^2 + x_k$. Обозначим сумму, которую необходимо вычислить, за S.

Тогда получаем, что

$$S = \sum_{k=1}^{2019} x_k^{2020} = \sum_{k=1}^{2019} (x_k^2 + x_k) = (\sum_{k=1}^{2019} x_k)^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 2019}^{2019} x_i x_j + \sum_{k=1}^{2019} x_k.$$

По теореме Виета $\sum\limits_{k=1}^{2019} x_k = 0$, $\sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 2019}^{2019} x_i x_j = 0$. Таким образом, $S = 0$. $\square$

6. Разложим дробь на простейшие:

$$\frac{1}{k^2 + 5k + 4} = \frac{a}{k+1} + \frac{b}{k+4},$$

$$\frac{1}{k^2 + 5k + 4} = \frac{ak + 4a + bk + b}{k^2 + 5k + 4},$$

то есть $a + b = 0, 4a + b = 1$, откуда получаем, что $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$. Вычислим исходную сумму, воспользовавшись полученными соотношениями:

$$S = \sum_{k=1}^{2019} \frac{1}{k^2 + 5k + 4} = \sum_{k=1}^{2019} (\frac{\frac{1}{3}}{k+1} - \frac{\frac{1}{3}}{k+4}) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{2019} (\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+4}).$$

Заметим, что все дроби с знаменателем от 5 до 2020 сократятся, так как они входят ровно один раз в положительное слагаемое и ровно один раз в отрицательное, поэтому

$$S = \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}).$$

$\square$

I тур. «Канторово ничтожество» VS «Недоматематики»

Условия задач

1. Что больше: $\frac{2020^{2020}}{2019^{2019}}$ или $\frac{2019^{2019}}{2018^{2018}}$?

2. Вычислите интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1) \cdot (x^2+1)}$.

3. Докажите следующее равенство:

$$(C_{2n}^0)^2 - (C_{2n}^1)^2 + (C_{2n}^2)^2 - ... + (C_{2n}^{2n})^2 = (-1)^n \cdot C_{2n}^n.$$

4. Докажите, что в любом треугольнике с длинами сторон a,b,c и радиусом r вписанной окружности выполняется неравенство:

$$r^2 \geqslant \frac{1}{6}(ab + ac + bc) - \frac{5}{36}(a^2 + b^2 + c^2).$$

5. Решите систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x'y + xy' - x' + y' = 1 \\ x'y - xy' = 0 \end{cases}$$

6. Найдите, чему равна следующая сумма: $\sum\limits_{k=1}^{2019} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)!$.

Результаты боя

№ задачи		A Недоматематики	B Канторово ничтожество	Жюри
3	A $\rightleftarrows$ B	12	0	0
4	B $\rightleftarrows$ A	6	0	6
1	B $\rightleftarrows$ A	12	0	0
5	A $\rightleftarrows$ B	10	0	2
Итог:		**40**	**0**	

Решения

1. Введем вспомогательные функции

$$f(x) = \frac{(x+1)^{x+1}}{x^x},$$

$$g(x) = \ln f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x.$$

Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность:

$$g'(x) = \ln(x+1) + 1 - \ln x - 1 = \ln\frac{x+1}{x} = \ln(1+\frac{1}{x}).$$

Таким образом, получаем, что $g'(x) > 0$ для любого положительного x, из этого следует, что функция $g(x)$ возрастает при $x > 0$, а значит, функция $f(x)$ также возрастает при $x > 0$, то есть $f(2019) > f(2018)$, что и требовалось определить в данной задаче. □

2. Обозначим интеграл, которые необходимо вычислить за

$$I = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}.$$

Сделаем замену переменных $y = -x$, посмотрим, что получится:

$$I = -\int\limits_{1}^{-1} \frac{dy}{(e^{-y}+1)(y^2+1)} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^y dy}{(e^y+1)(y^2+1)} =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (\frac{1}{y^2+1} - \frac{1}{(e^y+1)(y^2+1)})dy = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) - I.$$

Таким образом, мы получили следующее уравнение: $I = \frac{\pi}{2} - I$, откуда получаем, что $I = \frac{\pi}{4}$. $\square$

3. Рассмотрим следующий многочлен $P(x) = (1-x^2)^{2n} = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$. Найдем, чему равен коэффициент многочлена $P(x)$ при x в степени $2n$. С одной стороны, так как $P(x) = (1-x^2)^{2n}$, то по биному Ньютона коэффициент равен $C_{2n}^n \cdot (-1)^n$. С другой стороны, так как $P(x) = (1-x)^{2n}(1+x)^{2n}$, то по биному Ньютона коэффициент равен $\sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \cdot (-1)^k \cdot C_{2n}^{2n-k} = \sum\limits_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2 \cdot (-1)^k$, так как для биномиальных коэффициентов верно следующее соотношение: $C_n^k = C_n^{n-k}$. Таким образом, мы получили, что $C_{2n}^n \cdot (-1)^n = \sum\limits_{k=0}^{2n} (C_{2n}^k)^2 \cdot (-1)^k$, что и требовалось доказать. $\square$

4. В задаче просят доказать следующее неравенство:

$$r^2 \geqslant \frac{1}{6}(ab+ac+bc) - \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2),$$

так как $r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$, то достаточно доказать следующее неравенство

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \geqslant \frac{1}{6}(ab+ac+bc) - \frac{5}{36}(a^2+b^2+c^2),$$

или, что равносильно,

$$9\cdot(-a+b+c)\cdot(a-b+c)\cdot(a+b-c) \geqslant 6\cdot(a+b+c)\cdot(ab+ac+bc) - 5\cdot(a^2+b^2+c^2)\cdot(a+b+c).$$

Раскрыв скобки и преобразовав, получим следующее:

$$-a^3 - b^3 - c^3 + 2\cdot(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) - 9abc \geqslant 0.$$

Назовем это неравенство - неравенством $(*)$ и будем его доказывать. Для этого воспользуемся формулой длины между замечательными точками треугольниками, а именно $|IZ| = \frac{1}{3}\sqrt{5(ab+ac+bc) - 36Rr - 4p^2}$, где R - радиус описанной окружности. Заметим, что так как длина отрезка всегда неотрицательна, то $5(ab+ac+bc) - 36Rr - 4p^2 \geqslant 0$. Воспользовавшись тем, что $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4pr}$, преобразуем неравенство к следующему виду:

$$5(ab+ac+bc)(a+b+c) - 18abc - (a+b+c)^3 \geqslant 0.$$

Раскрыв скобки, получим следующее неравенство

$$-a^3 - b^3 - c^3 + 2\cdot(a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 + b^2c + bc^2) - 9abc \geqslant 0,$$

которое совпадает с неравенство $(*)$, таким образом, исходное неравенство доказано. $\square$

5. Заметим, что левая часть первого дифференциального уравнения можно преобразовать следующим образом: $x'y + xy' - x' + y' = (xy - x + y)' = 1$, откуда получаем, что $xy - x + y = t + c_1$, где c_1 некоторая константа. Изучим второе дифференциальное уравнение в этой системе: $x'y - xy' = 0$, в данном уравнении $y = y(t)$, преобразуем, чтобы $y = y(x)$, тогда получим следующее: $\frac{dx}{dt}(y - \frac{dy}{dx} \cdot x) = 0$, и, конечно, стоит разобрать отдельный случай, который возник: $x = const$. Если $x = const$, то из второго дифференциального уравнения системы следует, что тогда или $x = 0$, или $y = const$. Таким образом, осталось разобрать ситуацию, когда $y - \frac{dy}{dx} \cdot x = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными, решением которого является следующая функция $y = x \cdot c_2$. Таким образом, решениями второго дифференциального уравнения являются следующие функции: $x = 0, y$ - любая функция; $x = d_1, y = d_2$, где d_1, d_2 - некоторые константы; $y = c_2 \cdot x$, где c_2 - некоторая константа. Подставим найденные решения в первое дифференциальное уравнение. Если $x = 0, y$ - любая функция, то получаем, что в этой ситуации ответ следующий: $x = 0, y = t + c$. Если $x = d_1, y = d_2$, где d_1, d_2 - некоторые константы, то получившееся уравнение будет верно только в одной точке, поэтому не является решением всей системы. Если $y = c_2 \cdot x$, где c_2 - некоторая константа, то получаем следующее уравнение: $c_2x^2 + (c_2 - 1)x - t - c_1 = 0$. Первая ситуация, когда $c_2 = 0$, получаем следующее решение системы: $x = -t + c, y = 0$. Вторая и последняя ситуация, когда c_2 не равно 0, тогда $x = \frac{1 - c_2 + \sqrt{(c_2-1)^2 + 4t + 4c_1}}{2c_2}$, $y = \frac{1 - c_2 + \sqrt{(c_2-1)^2 + 4t + 4c_1}}{2}$ или $x = \frac{1 - c_2 - \sqrt{(c_2-1)^2 + 4t + 4c_1}}{2c_2}$, $y = \frac{1 - c_2 - \sqrt{(c_2-1)^2 + 4t + 4c_1}}{2}$. $\square$

6. Докажем, используя метод математической индукции, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2.$$

База: $n = 1$. $\frac{1}{2} \cdot 2! = \frac{3!}{2} - 2$ - это верно. Переход: предположим, что для некоторого n верно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2$, докажем, что тогда из этого будет следовать, что верно и для $n+1$: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! = \frac{(n+3)!}{2^{n+1}} - 2$. Рассмотрим выражение в левой части:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! + \frac{n+1}{2^{n+1}}(n+2)! =$$

$$= \frac{(n+2)!}{2^n} - 2 + \frac{n+1}{2^{n+1}}(n+2)! = \frac{(n+3)!}{2^{n+1}} - 2.$$

Таким образом, индукционный переход доказан, и, значит, верно следующее соотношение:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! = \frac{(n+2)!}{2^n} - 2,$$

откуда получаем, что

$$\sum_{k=1}^{2019} \frac{k}{2^k} \cdot (k+1)! = \frac{(2021)!}{2^{2019}} - 2.$$

$\square$

I тур. «Департамент анализа данных» VS «Математические $\psi\chi$» VS «Пожарники»

Условия задач

1. Найдите производную функции $f(x)$, являющейся решением следующего функционального уравнения:

$$x \cdot f(\frac{1}{x}) + 2 \cdot f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

при $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Докажите, что клетчатую доску 75×75 нельзя разрезать на доминошки и крестообразные фигурки из пяти клеток.

3. В равнобедренную трапецию с острым углом α вписана окружность. Какую часть площади трапеции занимает площадь четырехугольника с вершинами в точках касания?

4. На концерт пришли 125 человек, причем каждый был знаком ровно с 10 другими. В перерыве некоторые слушатели ушли. Оказалось, что все оставшиеся по-прежнему имеют одинаковое количество знакомых в зале. Докажите, что среди ушедших были знакомые друг с другом.

5. Определите кратность корня $x = 2019$ многочлена

$$P(x) = \frac{x - 2019}{2} \cdot (f'(x) + f'(2019)) - f(x) + f(2019),$$

где $f(x)$ - многочлен.

6. Друг напротив друга стоят 2019 троллей и 2019 гномов. Первые тролль и гном пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернулись и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми троллем и гномом пошли вторые тролль и гном, за ними третьи тролль и гном и так далее, пока не вышли последние тролль и гном. Двое жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Результаты боя

№ задачи		A Математические $\psi\chi$	B Департамент анализа данных	C Пожарники	Жюри
3	A $\to$ B	0	12	0	0
5	B $\rightleftarrows$ C	6	0	0	6
1	C $\to$ A	0	0	12	0
4	A $\to$ B	0	12	0	0
6	B $\to$ C	0	0	12	0
2	C $\to$ A	12	0	0	0
Итог:		**18**	**24**	**24**	

Решения

1. Выразим $f(\frac{1}{x})$ из функционального уравнения, заданного в условие задачи:

$$x \cdot f(\frac{1}{x}) + 2 \cdot f(x) = x^2 - \frac{1}{x},$$

получим, что

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}(x^2 - \frac{1}{x} - 2f(x)) = x - \frac{1}{x^2} - \frac{2f(x)}{x}.$$

Подставим вместо x в исходном функциональном уравнении $\frac{1}{x}$, получим следующее:

$$\frac{1}{x}f(x) + 2f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2} - x.$$

Вместо $f(\frac{1}{x})$ подставим выражение, которое было получено ранее:

$$\frac{1}{x}f(x) + 2x - \frac{2}{x^2} - \frac{4f(x)}{x} = \frac{1}{x^2} - x,$$

откуда находим, что $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$, а значит, теперь можем вычислить производную $f'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$. $\square$

2. Раскрасим нашу доску в шахматную раскраску. Тогда в каждой доминошке ровно одна клетка черная и ровно одна клетка белая - пусть всего их будет a штук. Крестообразные фигурки из пяти клеток будут двух видов: первый вид - одна черная клетка и 4 белых (обозначим их количество за b), второй вид - одна белая клетка и 4 черных (обозначим их количество за c). Так как доска размером 75×75, то не теряя общности можно считать, что черных клеток на одну меньше, чем белых. Тогда вычислим, чему равно количество черных клеток: $a + b + 4c$, аналогично общее количество белых клеток следующее: $a + b + 4c$. Таким образом, получаем следующее соотношение: $a + 4b + c + 1 = a + b + 4c$, после упрощения которого, получим, что $3c - 3b = 1$, что невозможно при неотрицательных целых числах b, c. $\square$

3. Введем следующие обозначения. Вершины трапеции назовем $ABCD$, центр вписанной окружности за O, точки касания сторон AB, BC, CD, DA за E, F, G, H соответственно. Тогда $OE = OF = OG = OH = R$, где R - радиус вписанной окружности. Так как острый угол трапеции равен α, то угол EOH равен углу GOH и равен $\pi - \alpha$, так как OH перпендикулярен AD. Аналогично угол EOF равен углу FOG и равен α. Значит, теперь можно вычислить площадь четырехугольника $S_0 = S(EFGH) = S(EOF) + S(FOG) + S(GOH) + S(HOE) = 2R^2 \sin\alpha$. Так как трапеция равнобедренная и точки E, G, H являются точками касания вписанной окружности, то $AE = AH = HD = GD = x$. Аналогично $EB = BF = CF = CG = y$. Найдем, чему равны x, y. Так как AO является биссектрисой и высотой в треугольниках AEH, EOH, то из прямоугольного треугольника AOH можно найти, что $x = R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Аналогично можно получить, что $y = R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Значит, можно вычислить площадь трапеции: $S = 2R\frac{2x+2y}{2} = 2R^2(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}) = \frac{R^2}{\sin\alpha}$. Таким образом, отношение, которое необходимо было найти, равно следующему: $\frac{S_0}{S} = \frac{2R^2\sin\alpha}{\frac{R^2}{\sin\alpha}} = 2\sin^2\alpha$. $\square$

4. Докажем от противного. Предположим, что среди ушедших не было знакомых. Обозначим за x количество людей, которые ушли, за k количество людей, с которыми знаком каждый из оставшихся среди оставшихся, то есть $0 \leqslant k < 9$. Тогда вычислим, сколько исчезло связей знакомств. С одной стороны, ушло x человек, каждый из которых был знаком с 10 другими, значит, исчезло $10x$ связей знакомств. С другой стороны, известно, что осталось $125 - x$ человек, каждый из которых знаком ровно с k людьми из оставшихся, то есть исчезло $(10-k)(125-x)$ связей знакомств. Таким образом, получаем следующее соотношение: $10x = (10-k)(125-x)$, откуда находим, что $x = \frac{(10-k)\cdot 125}{20-k}$. Так как x натуральное число, то число $(10-k)\cdot 125$ должно нацело делиться на число $20 - k$. Так как число $20 - k$ больше числа $10 - k$, то это значит, что числа 125 и $20 - k$ должны быть не взаимно простыми, то есть $20 - k$ делится на 5, значит, k делится на 5. Таким образом, осталось проверить два варианта $k = 0$, и $k = 5$. При $k = 0, x = \frac{125}{2}$, при $k = 5, x = \frac{125}{3}$. Мы пришли к противоречию, значит, условие задачи доказано. $\square$

5. Введем следующее обозначение: $a = 2019$. Произведем некоторые вычисления:

$$P(x) = \frac{x-a}{2}(f'(x) + f'(a)) - f(x) + f(a),$$

значит, $P(a) = 0$. Вычислим первую производную:

$$P'(x) = \frac{1}{2}(f'(x) + f'(a)) + \frac{x-a}{2}f''(x) - f'(x) = \frac{1}{2}((x-a)f''(x) - f'(x) + f'(a)),$$

то есть $P'(a) = 0$. Вычислим вторую производную:

$$P''(x) = \frac{1}{2}(x-a)f'''(x).$$

Теперь стоит рассмотреть несколько случаев. Допустим, что степень многочлена $f(x)$ больше 2, обозначим за k кратность корня a многочлена $f'''(x)$, тогда кратность корня a многочлена $P''(x)$ равна $k+1$, и так как $P(a) = P'(a) = 0$, то кратность корня a многочлена $P(x)$ равна $k+3$. Осталось рассмотреть случаи, когда степень многочлена $f(x)$ меньше 3. На самом деле все эти случаи одинаковые, потому что в этом случае многочлен $P(x) = 0$, а значит, кратность корня равна бесконечности. □

6. Для того, чтобы решить задачу сделаем одно важное наблюдение: совершенно неважно, кто с кем совершает рукопожатие: тролль с троллем, гном с гномом или тролль с гномом, на общее количество рукопожатий данная информация никак не влияет. Давайте тогда слегка изменим условие задачи, а именно, уберем часть, что при рукопожатии участники разворачивались и шли в обратном направлении. Теперь после каждого рукопожатия каждый участник будет идти в том же направлении, в котором он изначально шел. Заметим, что данное изменение условия не влияет на общее количество рукопожатий. Осталось посчитать, сколько было совершенно рукопожатий в новой версии условия задачи. Нетрудно посчитать, что их было совершенно $2019 \cdot 2019$, так как каждый "тролль" пожал руку каждому "гному". □

I тур. «Интернациональный флекс» VS «НП» VS «Ретракция шара на сферу»

Условия задач

1. Докажите, что $\operatorname{arctg}(\frac{5\sqrt{3}}{6}) > 0,91$.

2. Найдите, чему равна следующая сумма: $\sum\limits_{k=0}^{2019}(k^2+1)\cdot C_{2019}^k$.

3. Страна ABC имеет вид квадратной сетки 2019×2019, в каждом узле которой расположен город. Сколькими способами можно составить туристический маршрут, который: 1) начинается и заканчивается в одном и том же городе; 2) включает в себя 8 городов (с учетом того, с которого начали путешествие); 3) в каждом городе маршрута (кроме начального) туристы будут ровно один раз?

4. Докажите, что для любого натурального n многочлен

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

имеет не более одного вещественного корня.

5. Докажите, что в любом треугольнике выполняется следующее равенство:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c},$$

где r - радиус вписанной окружности, r_a, r_b, r_c - радиусы вневписанных окружностей.

6. Каждый сотрудник компании XXX, имеющий четное число знакомых среди сотрудников, послал им по письму, а каждый из остальных сотрудников компании послал по письму всем незнакомым. Тедди получил 99 писем. Докажите, что он получит еще хотя бы одно письмо.

Результаты боя

№ задачи		A Ретракция шара на сферу	B Интернациональный флекс	C НП	Жюри
1	A $\to$ B	0	12	0	0
2	B $\rightleftarrows$ C	0	12	0	0
5	C $\to$ A	12	0	0	0
4	A $\to$ B	0	12	0	0
6	B $\rightleftarrows$ C	0	12	0	0
3	C $\to$ A	0	0	0	12
Итог:		**12**	**48**	**0**	

Решения

1. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ и построим для этой функции касательную в точке $x = \frac{5\sqrt{3}}{6}$:

$$g(x) = \frac{12}{37}(x - \frac{5\sqrt{3}}{6}) + \operatorname{arctg}(\frac{5\sqrt{3}}{6}).$$

Так как функция $f(x)$ выпукла вверх при $x > 0$, и $g(x)$ - касательная в точке $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ к функции $f(x)$, то $g(x) > f(x)$ для любого $x > 0$ кроме точки касания, это значит, что $g(1) > f(1)$, то есть

$$\frac{12}{37} - \frac{10\sqrt{3}}{37 \cdot 6} + \operatorname{arctg}(\frac{5\sqrt{3}}{6}) > \operatorname{arctg}(1),$$

преобразуя, получим следующее:

$$\operatorname{arctg}(\frac{5\sqrt{3}}{6}) > \frac{\pi}{4} - \frac{12}{37} + \frac{10\sqrt{3}}{37 \cdot 6} > 0.92,$$

так как $\frac{\pi}{4} - \frac{12}{37} > 0.46$ и $\frac{10\sqrt{3}}{37 \cdot 6} > 0.46$. Таким образом, так как $0.92 > 0.91$, то получаем, что $\operatorname{arctg}(\frac{5\sqrt{3}}{6}) > 0.91$, что и требовалось доказать. $\square$

2. По условию задачи необходимо вычислить следующую сумму:

$$\sum_{k=0}^{2019}(k^2+1)\cdot C_{2019}^k = \sum_{k=0}^{2019} k^2\cdot C_{2019}^k + \sum_{k=0}^{2019} C_{2019}^k.$$

Обозначим, первую сумму за $A = \sum\limits_{k=0}^{2019} k^2\cdot C_{2019}^k$, вторую за $B = \sum\limits_{k=0}^{2019} C_{2019}^k$. Введем вспомогательную функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2019} x^k\cdot C_{2019}^k = (1+x)^{2019},$$

отсюда получаем, что при $x=1, B = 2^{2019}$. Найдем производную функции

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{2019} kx^{k-1}\cdot C_{2019}^k = 2019\cdot(1+x)^{2018}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = xf'(x) = \sum_{k=0}^{2019} kx^k\cdot C_{2019}^k = 2019x(1+x)^{2018}.$$

Вычислим производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{2019} k^2x^{k-1}\cdot C_{2019}^k = 2019(1+x)^{2018} + 2019x\cdot 2018\cdot(1+x)^{2017},$$

откуда получаем, что $A = 2019\cdot 2^{2018} + 2019\cdot 2018\cdot 2^{2017}$. Таким образом, исходная сумма равна следующему:

$$A+B = 2019\cdot 2^{2018} + 2019\cdot 2018\cdot 2^{2017} + 2^{2019} = 2^{2019}(2019\cdot 505+1).$$

$\square$

3. Заметим, что по указанным условиям видов маршрута существует всего два: прямоугольник 1×3 или квадрат 2×2. Осталось посчитать, сколько таких маршрутов существует в данной стране. Для каждого маршрута зафиксируем левый верхний угол, то есть для каждого вида маршрута посчитаем, сколько существует городов, которые могли бы стать левым верхнем углом маршрута. Для горизонтальных прямоугольников 1×3 всего вариантов будет $2019\cdot 2017$, для вертикальных прямоугольников 1×3 всего вариантов будет $2019\cdot 2017$, для квадратов 2×2 всего вариантов будет $2018\cdot 2018$. Таким образом, всего маршрутов существует $2\cdot 2019\cdot 2017 + 2018\cdot 2018 = 3\cdot 2018^2 - 2$. $\square$

4. Докажем по индукции. База: $n = 1 : P_1(x) = 1 + x$ - один корень. Переход: пусть многочлен $P_n(x)$ имеет не более одного корня, докажем, что $P_{n+1}(x)$ тоже имеет не более одного корня. Заметим, что верно следующее соотношение $P'_{n+1}(x) = P_n(x)$. По индукционному предположению у $P_n(x)$ не более одного вещественного корня. Если у $P_n(x)$ нет корней, то $P'_{n+1}(x)$ одного знака на всей оси, следовательно, $P_{n+1}(x)$ на всей оси возрастает, так как старший коэффициент положительный, значит, у $P_{n+1}(x)$ ровно один корень. Предположим, что у $P_n(x)$ один корень x_0. Тогда, так как старший коэффициент $P_n(x)$ положительный, то возможны две ситуации: в первой ситуации $P'_{n+1}(x)$ всегда неотрицательна, значит, $P_{n+1}(x)$ на всей оси возрастает, то есть в этой ситуации у $P_{n+1}(x)$ ровно один корень. Вторая ситуация следующая - $P_{n+1}(x)$ убывает на луче $(-\infty, x_0)$ и возрастает на $(x_0, +\infty)$, поэтому достаточно доказать, что $P_{n+1}(x_0) \geqslant 0$. Вычислим, чему равно это значение $P_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) + \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x_0^{n+1}}{(n+1)!} \geqslant 0$, так как $P_{n+1}(x)$ убывает на $(-\infty, x_0)$, то $n+1$ - четное число. Таким образом, переход доказан, а значит, доказано утверждение задачи. □

5. Для того, чтобы доказать задачу, воспользуемся формулами для радиусов вписанной и вневписанных окружностей:

$$r = \frac{S}{p}, r_a = \frac{S}{p-a}, r_b = \frac{S}{p-b}, r_c = \frac{S}{p-c}.$$

Подставим эти формулы в условие задачи:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-P}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r},$$

что и требовалось доказать. □

6. Докажем, что Тедди не мог получить нечетное количество писем. Предположим противное, то есть что Тедди получил нечетное количество писем. Обозначим за a количество знакомых Тедди, каждый из которых знаком с четным количеством сотрудников. Обозначим за b количество знакомых Тедди, каждый из которых знаком с нечетным количеством сотрудников. Обозначим за c количество сотрудников, с которыми Тедди не знаком, каждый из которых знаком с четным количеством сотрудников. Обозначим за d количество сотрудников, с которыми Тедди не знаком, каждый из которых знаком с нечетным количеством сотрудников. Заметим, что количество сотрудников, каждый из которых знаком с нечетным количеством сотрудников, должно быть четными числом. Так как если построить граф, в котором вершины - сотрудники, а ребро ставится между двумя людьми, которые знакомы друг с другом, то тогда в нем должно быть четное количество вершин с нечетной степенью. Воспользуемся данным утверждением. Предположим, что a четное, тогда по нашему предполжению (от противного) будет следовать, что d нечетное. Рассмотрим четность числа b. Если b - четное число, то всего сотрудников, каждый из который знаком с нечетным количеством сотрудников, будет равно $b + d$, то есть будет нечетным, противоречие. Если b -

нечетное число, то всего сотрудников, каждый из который знаком с нечетным количеством сотрудников, будет равно $b+d+1$, то есть будет нечетным, противоречие. Значит, осталось рассмотреть ситуацию, когда a нечетное, тогда по нашему предположению (от противного) будет следовать, что d четное. Рассмотрим четность числа b. Если b - четное число, то всего сотрудников, каждый из который знаком с нечетным количеством сотрудников, будет равно $b+d+1$, то есть будет нечетным, противоречие. Если b - нечетное число, то всего сотрудников, каждый из который знаком с нечетным количеством сотрудников, будет равно $b+d$, то есть будет нечетным, противоречие. Таким образом, мы пришли к противоречию, а значит, Тедди получит еще хотя бы одно письмо. □

II тур. «2 балла» VS «Пожарники» VS «Узнавшие»

Условия задач

1. На плоскости расположены две параболы так, что оси их взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в 4 точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

2. Сколько раз в течение суток часовая стрелка совпадает с минутной?

3. Известно, что натуральные числа x, y, z удовлетворяют следующему равенству: $x^2 + y^2 = z^2$. Докажите, что xyz делится на 60.

4. Докажите, что: $1,1^{100} > 1000$.

5. Вычислите следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & ... & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & ... & C_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & ... & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

6. Прямоугольник $m \times n (m \leqslant n)$ называется латинским прямоугольником, если он заполнен натуральными числами от 1 до n так, что в каждой строке и в каждом столбце стоят различные числа. Докажите, что латинский прямоугольник можно дополнить до латинского квадрата $n \times n$.

Результаты боя

№ задачи		А Узнавшие	В Пожарники	Жюри
1	А $\to$ В	0	12	0
4	В $\to$ А	12	0	0
2	А $\rightleftarrows$ В	0	12	0
3	В $\to$ А	9	3	0
6	А $\rightleftarrows$ В	0	6	6
5	А $\rightleftarrows$ В	0	6	6
Итог:		**21**	**39**	

Решения

1. Введем декартову систему координат таким образом, что оси заданных парабол будут осями координат. Уравнения парабол будут выглядеть следующим образом: $y = ax^2 + b, x = cy^2 + d$. Различные точки пересечения двух парабол обозначим следующим образом: $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b), C(x_c, y_c), D(x_d, y_d)$. Окружность, описанная около треугольника ABC, будет задана уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, тогда известно, что выполнены следующие соотношения:

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = R^2,$$
$$(x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 = R^2,$$
$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2.$$

Вычтем из первого уравнения второе, преобразовав, получим, что

$$2(x_b - x_a)x_0 + x_a^2 - x_b^2 + 2(y_b - y_a)y_o + y_b^2 - y_a^2 = 0,$$

так как y_a не равно y_b, то

$$y_0 = \frac{x_a^2 - x_b^2 + y_a^2 - y_b^2 - 2(x_b - x_a)x_0}{2(y_b - y_a)}.$$

Так как $x_a^2 = \frac{y_a - b}{a}, y_a^2 = \frac{x_a - d}{c}$ и аналогично для x_b, y_b, то

$$y_0 = \frac{2(x_a - x_b)x_0 + (y_a - y_b)\frac{1}{a} + (x_a - x_b)\frac{1}{c}}{2(y_b - y_a)}.$$

Заметим, что если мы заменим точку A на C, то получим аналогичное выражение, приравняв которые, можно выразить x_0. После данных арифметических преобразований получим, что $x_0 = -\frac{1}{2c}$, подставим найденное значение x_0 в y_0, получим, что $y_0 = -\frac{1}{2a}$. Таким образом, получаем, что уравнение окружности $(x + \frac{1}{2c})^2 + (y + \frac{1}{2a})^2 = R^2$. Заметим, что если мы проделаем аналогичные вычисления для треугольника ACD, то получим аналогичное уравнение окружности $(x + \frac{1}{2c})^2 + (y + \frac{1}{2a})^2 = R_0^2$. Так как этим двум окружностям принадлежит точка A, то из этого следует, что радиусы равны, а значит, существует окружность, на которой расположены все точки пересечения, что и требовалось доказать. □

2. Назовем одним делением на часах расстояние между соседними цифрами (между 1 и 2, между 2 и 3, ...). Начинается отсчет с 00:00, часовая и минутная стрелка совпадают. Прошел час, часовая стрелка прошла одно деление, минутная стрелка прошла один круг, значит, часовая и минутная стрелка встретились за этот час ровно один раз. Аналогично за каждый следующий час часовая и минутная стрелка совпадали ровно 1 раз. Таким образом, так как в сутках 24 часа, то если считать и 00:00 первого дня, и 00:00 второго дня, то будет 24 раза, если 00:00 второго дня не учитывать, то будет 23 раза. В условии задачи не оговорено, что именно следует считать сутками, поэтому возможны два варианта ответа при правильном уточнении значения понятия "суток". □

3. Так как квадраты натуральных чисел при делении на 3 дают только остатки 0 и 1, то хотя бы одно из чисел x, y, z делится на 3. Так как квадраты натуральных чисел при делении на 4 дают только остатки 0 и 1, то хотя бы одно из чисел x, y, z делится на 4. Так как квадраты натуральных чисел при делении на 5 дают только остатки 0,1 и 4, то хотя бы одно из чисел x, y, z делится на 5. Таким образом, поизведение чисел xyz делится на 60, что и требовалось доказать. □

4. Требуется доказать следующее неравенство: $(1,1)^{100} > 1000$, то есть доказать, что $(1+0.1)^{100} > 1000$. Запишем левую часть неравенства, используя бином Ньютона: $(1+0.1)^{100} = \sum\limits_{k=0}^{100} C_n^k 10^{-k}$. Так как все слагаемые положительные, то достаточно найти часть слагаемых (или одно слагаемое), сумма которых превосходит 1000. Нетрудно вычислить, что сумма первых шести слагаемых уже будет больше 1000 или, например, слагаемое $C_{100}^6 10^{-6}$ также будет больше 1000, что и требовалось доказать. □

5. Введем следующее обозначение:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & ... & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & ... & C_{n+1}^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & ... & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Докажем по индукции, что при любом $n, D_n = 1$. База. $n = 1, D_1 = 1$. Переход, предположим, что $D_{n-1} = 1$, докажем, что тогда $D_n = 1$. Воспользуемся формулой, что $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. В определителе D_n вычтем из каждого столбца предыдущий, получим следующее:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & ... & C_n^1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & C_{n-1}^{n-2} & C_n^{n-2} & ... & C_{2n-3}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Теперь вычтем из каждой строки предыдущую строку, получим, что

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & C_2^1 & ... & C_{n-1}^1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & C_{n-1}^{n-2} & ... & C_{2n-4}^{n-2} \end{vmatrix} = D_{n-1} = 1$$

по индукционному предположению, а значит, переход доказан, то есть $D_n = 1$ для любого n. $\square$

6. Предположим, что $m < n$, докажем, что такой прямоугольник можно дозаполнить до квадрата $n \times n$. Построим двудольный граф $G(V_1, V_2)$, в котором V_1 - это множество столбцов латинского прямоугольника размера $m \times n$, $V_2 = \{1, 2, ..., n\}$ а вершины $i \in V_1, j \in V_2$ соединены ребром тогда и только тогда, когда в i-ом столбце прямоугольника нет числа j. Ясно, что степень любой вершины из доли V_1 равна $n - m$. С другой стороны, любое число j встречается в m строках исходного латинского прямоугольника m раз, значит, оно появляется в m столбцах и отсутствует в $n - m$ столбцах. Отсюда следует, что и степень любой вершины из V_2 также равна $n - m$. Таким образом, двудольный граф $G(V_1, V_2)$ является непустым и регулярным (степени всех вершин одинаковые). Тогда по лемме Холла в данном графе существует совершенное паросочетание. Каждое совершенное паросочетание задает одну из новых строк латинского квадрата. $\square$

II тур. «Lenny» VS «Восток-1» VS «Недоматематики»

Условия задач

1. В некоторой стране 2019 городов, известно, что из каждого города выходит хотя бы 1009 дорог в другие города (два города соединены не более одной дорогой), докажите, что тогда из любого города можно доехать до любого другого.

2. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ верно следующее неравенство:

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}\right).$$

3. Многочлен $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + 1$ с неотрицательными коэффициентами имеет n вещественных корней. Докажите, что $P(2) \geqslant 3^n$.

4. Найдите эллипс наименьшей площади, описанный около треугольника. В ответе дайте отношение площадей эллипса и треугольника.

5. Аня раскрасила всю плоскость в три цвета. Докажите, что она сможет найти две точки одного цвета на расстоянии 239м.

6. Пусть $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+...}}} = \frac{m}{n}$, где m и n - натуральные взаимно простые числа, а в левой части равенства дробная часть повторяется 2019 раз. Найдите, чему равно $m^2 + mn - n^2$.

Результаты боя

№ задачи		A Lenny	B Восток-1	C Недоматематики	Жюри
1	A $\to$ B	0	12	0	0
6	B $\to$ C	0	1	10	1
2	C $\rightleftarrows$ A	0	0	12	0
5	A $\to$ B	0	12	0	0
3	B $\to$ C	0	0	12	0
4	C $\rightleftarrows$ A	1	6	0	5
Итог:		**1**	**31**	**34**	

Решения

1. Рассмотрим два города A, B и докажем, что существует путь соединяющий эти города. Если города A, B соединены ребром, то тогда путь существует. Предположим, что они не соединены ребром. По условию задачи известно, что город A соединен хотя бы с 1009 городами, и город B соединен хотя бы с 1009 городами, значит по принципу Дирихле, так как всего городов в стране 2019, существует город C такой, что и город A соединен с городом C, и город B соединен с городом C. Таким образом, существует путь между городами A и B, что и требовалось доказать. $\square$

2. Хотим доказать данное неравенство

$$\frac{1}{n+1}(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1}) \geqslant \frac{1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}).$$

Проведем несколько равносильных действий: домножим обе части неравенства на $n+1$, получим следующее:

$$1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2n-1} \geqslant \frac{n+1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) =$$

$$= (1 + \frac{1}{n})(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}).$$

Прибавим к обеим частям неравенства $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}$, получим следующее:

$$1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2n}\geqslant 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}).$$

Вычтем из обеих частей неравенства $1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}$, получим следующее:

$$\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{n}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2n}),$$

что верно, так как в обеих частях неравенства находится n слагаемых, и также $\frac{1}{n+k}\geqslant\frac{1}{2nk}$ для $1\leqslant k\leqslant n$. Таким образом, исходное неравенство также верно, что и требовалось доказать. □

3. Заметим, что

$$3^n=(2+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k2^n,$$

$$P(2)=\sum_{k=0}^{n}a_k2^k,$$

где $a_0=a_n=1$. По теореме Виета $\prod\limits_{k=1}^{n}x_k=(-1)^n$, где x_k - корни многочлена $P(x)$, так как все $x_k\leqslant 0$, то заменим их на $-x_k$, которые теперь будут неотрицательными. Воспользуемся неравенством среднестепенных, а именно, что среднее арифметическое больше или равно среднего геометрического:

$$\frac{\sum x_{i_1}...x_{i_k}}{C_n^k}\geqslant\sqrt[C_n^k]{(\prod_{i=0}^{n}x_i)^{C_{n-1}^{k-1}}}=1,$$

то есть $\sum x_{i_1}...x_{i_k}\geqslant C_n^k$, а это значит, что $a_k\geqslant C_n^k$, так как знаки совпадают из-за того, что ченость количества множителей совпадает с номером коэффициента. Таким образом, $P(2)\geqslant 3^n$. □

4. Заметим, что эллипс наименьшей площади - это круг. Известно, что существует аффинное преобразование, которое переведет треугольник в равносторонний, а эллипс в окружность. В ответе необходимо указать отношение площадей эллипса и треугольника, так как площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и радиус описанной около этого треугольника окружности равен $R=\frac{a^3}{4S}$, то площадь круга равна $S_0=\frac{\pi a^2}{3}$, откуда получаем, что $\frac{S_0}{S}=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. □

5. Обозначим за $R=239$м. Докажем от противного, предположим, что можно раскрасить плоскость в 3 цвета так, чтобы никакие две точки на расстоянии R не были бы одного цвета. Рассмотрим некоторую точку A и проведем две окружности $\omega_1(A,R),\omega_2(A,R\sqrt{3})$. Докажем, что тогда все точки на окружности ω_2 должны будут иметь тот же цвет, что и точка A. Возьмем произвольную точку B на окружности ω_2. Возьмем точки $C, D \in \omega_1$ такие, что углы CAB, DAB равны 30 градусам, тогда по нашему построению получается, что $AC = AD = CD = BC = BD = R$. Если точки A, B разного цвета, то тогда получается, что точки C, D третьего цвета, а значит, такого быть не может, так как расстояние между ними равно R. Таким образом, на окружности ω_2 все точки одного цвета, а это значит, что так как радиус окружности ω_2 равен $R\sqrt{3}$, то на этой окружности существует хорда длины R. Таким образом, мы пришли к противоречию, а значит, всегда будут существовать две точки одного цвета, между которыми расстояние равно 239м. $\square$

6. Обозначим за F_n - $n-$ое число Фибоначчи, при условии, что $F_0 = 1, F_1 = 1$. Докажем вспомогательное утверждение: соседние числа Фибоначчи взаимно просты. Докажем по индукции. База: $n = 1, (F_0, F_1) = (1, 1) = 1$. Переход: предположим, что $(F_n, F_{n-1}) = 1$, докажем, что тогда $(F_{n+1}, F_n) = 1$. Пусть не так, то есть F_{n+1} делится на d и F_n делится на d, но так как $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, то F_{n-1} тоже делится на d, что неверно по индукционному предположению, если $d > 1$.Таким образом, соседние числа Фибоначчи взаимно просты. Введем последовательность a_n следующим образом: $a_n = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$ - дробная черта написана n раз. Тогда докажем по индукции, что $a_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$. База: $n = 1, a_1 = \frac{F_0}{F_1} = \frac{1}{1} = 1$. Переход: предположим, что $a_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$, докажем, что тогда $a_{n+1} = \frac{F_n}{F_{n+1}}$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{F_n}{F_n + F_{n-1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Таким образом, $a_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$ для любого натурального n, заметим также, что данная дробь является несократимой в силу взаимной простоты соседних чисел Фибоначчи. Таким образом, получаем, что $m = F_{2010}, n = F_{2011}$, то есть по условию задачи необходимо вычислить следующее:

$$F_{2010}^2 + F_{2010}F_{2011} - F_{2011}^2.$$

Докажем по индукции, что $F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$ для любого натурального n. База: $n = 0, 1^2 + 1 \cdot 1 - 1 = 1 = (-1)^0$. Переход: предположим, что для некоторого n верно, что $F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$, докажем, что тогда это утверждение верно и для $n + 1$:

$$F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+2} - F_{n+2}^2 = F_{n+1}^2 + F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) - (F_n + F_{n+1})^2 =$$

$$= -(F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.$$

Таким образом, $F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$ для любого натурального n, то есть $F_{2010}^2 + F_{2010}F_{2011} - F_{2011}^2 = (-1)^{2020} = 1$. $\square$

II тур. «Департамент анализа данных» VS «Интернациональный флекс» VS «ОЖВВ»

Условия задач

1. Докажите, что для любого натурального n найдется число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n.

2. Лежит кучка из 30 миллионов спичек. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может взять из кучки любое число вида 2^n (т.е. 1, 2, 4, 8, 16, ...). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. Вычислите следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & \dots & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & \dots & \epsilon^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & \dots & \epsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix},$$

где $\epsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$.

4. В таблице 17×17 записаны положительные числа. В каждой строке эти числа образуют арифметическую прогрессию, а в каждом столбце квадраты этих чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что произведение числа в левом верхнем углу и числа в правом нижнем углу равно произведению чисел в двух других углах.

5. Некоторый квадрат разрезали на несколько меньших квадратов. Известно, что любая вертикальная прямая, не проходящая по сторонам маленьких квадратиков, пересекает ровко k квадратиков, а каждая горизонтальная - ровно l. Докажите, что $k = l$.

6. Пусть $N(x)$ - число перемен знаков в следующей последовательности $f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)$, где $f(x)$ - многочлен степени n. Докажите, что тогда число корней с учетом их кратности, заключенных между a и b, где $f(a) \neq 0, f(b) \neq 0$ и $a < b$, не превосходит $N(a) - N(b)$, причем число корней может отличаться от $N(a) - N(b)$ лишь на четное число.

Результаты боя

№ задачи		A Интернациональный флекс	B ОЖВВ	C Департамент анализа данных	Жюри
6	A $\to$ B	3	9	0	0
3	B $\to$ C	0	3	9	0
4	C $\to$ A	12	0	0	0
5	A $\rightleftarrows$ B	10	2	0	0
1	B $\to$ C	0	0	12	0
2	C $\to$ A	12	0	0	0
Итог:		**37**	**14**	**21**	

Решения

1. Докажем по индукции более сильное утверждение, а именно, что для любого натурального n найдется $n-$значное число, составленное из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n. База: $n = 1$, число 2 подходит. Переход: предположим, что наше утверждение верно для некоторого n, то есть существует некоторое число m, у которого n цифр, которое состоит только из цифр 1 и 2 и делится на число 2^n. Докажем, что тогда из этого следует, что для числа $n+1$ существует число, состоящее из $n+1$ цифры, каждая из которых это 1 или 2, которое будет делиться на 2^{n+1}. Так как число m делится на 2^n, это значит, что число m либо делится на 2^{n+1}, либо сравнимо с 2^n по модулю 2^{n+1}. В первом случае рассмотрим число $x = 2 \cdot 10^n + m$, во втором случае рассмотрим число $y = 10^n + m$. Заметим, что выбранные числа в каждом случае удовлетворяют условию, а именно, в них $n+1$ цифра, каждая из которых 1 или 2, а также они делятся на 2^{n+1}. Таким образом, наше утверждение доказано, а значит, доказано и условие задачи. $\square$

2. Докажем, что выиграет второй игрок. Его стратегия будет следующая: если первый игрок взял количество спичек, которое сравнимо с 1 по модулю 3, то второй игрок возьмет две спички; если первый игрок взял количество спичек, которое сравнимо с 2 по модулю 3, то второй игрок возьмет одну спичку. Других вариантов быть не может, так как степени двойки не могут делиться на 3. Заметим, что так как начальное количество спичек делилось на 3, то после каждого хода первого игрока количество спичек не будет делиться на 3, а после каждого хода второго игрока будет делиться на 3. Из этого следует, что последним будет ходить второй игрок, у которого всегда будет ход, пока ход есть у первого игрока (ведь всегда можно взять одну спичку, при условии, что они еще не закончились). Таким образом, второй игрок выиграет при правильной стратегии. $\square$

3. Введем следующее обозначение

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & \epsilon & \epsilon^2 & ... & \epsilon^{n-1} \\ 1 & \epsilon^2 & \epsilon^4 & ... & \epsilon^{2(n-1)} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & \epsilon^{n-1} & \epsilon^{2(n-1)} & ... & \epsilon^{(n-1)^2} \end{vmatrix}.$$

Умножая данный определитель D сам на себя и замечая, что $\epsilon^k = 1$ тогда и только тогда, когда k делится на n, получим, что

$$D^2 = \begin{vmatrix} n & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & n \\ 0 & 0 & ... & n & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & n & ... & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{C_{n-1}^2} n^n,$$

откуда получаем, что $D = \pm i^{C_{n-1}^2} n^{\frac{n}{2}}$ и для модуля D находим, что $|D| = n^{\frac{n}{2}}$. Остается определить аргумент. Вычисляя определитель D как определитель Вандермонда чисел $1, \epsilon, \epsilon^2, ..., \epsilon^{n-1}$ и полагая, что $\epsilon = \alpha^2$, где $\alpha = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$, получим, что

$$D = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} (\epsilon^k - \epsilon^j) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{k+j}(\alpha^{k-j} - \alpha^{-(k-j)}) =$$

$$= \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} 2i\sin\frac{(k-j)\pi}{n}.$$

Для рассматриваемых значений j и k всегда $0 < k - j < n$ и, значит, $\sin\frac{(k-j)\pi}{n} > 0$. Поэтому

$$|D| = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \sin\frac{(k-j)\pi}{n} = n^{\frac{n}{2}}.$$

$D = |D|\beta$, где $\beta = i^{C_n^2} \prod\limits_{0 \leqslant j < k \leqslant n-1} \alpha^{j+k}$. В показатель степени при α каждое целое число $p (0 \leqslant p \leqslant n-1)$ войдет ровно $n-1$ раз, либо под видом j для $k = p+1, p+2, ..., n-1$, либо под видом k для $j = 0, 1, 2, ..., p-1$. Замечая, что $\alpha^{\frac{n}{2}} = i$ (при нечетном n будет $\alpha^{\frac{n}{2}} = \pm i$, однако выбор знака не играет роли ввиду четности числа $n-1$, что ясно из приведенных ниже вычислений), находим, что $\beta = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}} = i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}$. Полагая $3n = 2n + n$ и используя данное выше выражение для $|D|$, получаем требуемое выражение для D. $\square$

4. Обозначим левое верхнее число за a, правое верхнее число за b, левое нижнее число за c, правое нижнее число за d, девятое число (то есть середину) верхней строки за x, девятое число (то есть середину) нижней строки за

y, девятое число (то есть середину) левого столбца за z, девятое число (то есть середину) правого столбца t, девятое число в девятое строке (то есть центр таблицы) за s. Тогда так как в каждой строки числа являются членами арифметической прогрессии, то

$$x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{c+d}{2}.$$

Так как в каждом столбце квадраты чисел являются членами арифметической прогрессии, то

$$z = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}, t = \sqrt{\frac{b^2+d^2}{2}}.$$

Теперь рассмотрим число s: с одной стороны, s - середина девятой строки, то есть

$$s = \frac{z+t}{2} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}}{2\sqrt{2}},$$

с другой стороны - число s - середина девятого столбца, то есть

$$s = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{8}}.$$

Таким образом, получаем следующее соотношение:

$$\frac{\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{8}},$$

возведя в квадрат и упростив, получим следующее:

$$ab + cd = \sqrt{(a^2+c^2)\cdot(b^2+d^2)},$$

возведя в квадрат, упростив и преобразовав, получим, что $(ad-bc)^2 = 0$, откуда получаем, что $ad = bc$, что и требовалось доказать. □

5. Начнем с того, что несмотря на то, что явно этого в задаче не сказано, но стороны всех маленьких квадратов параллельны сторонам большого квадрата (иначе квадрат нельзя было бы разрезать на квадраты меньшего размера). Также под фразой "несколько квадратов" подразумевается, что количество квадратов конечное число. Продлим стороны всех маленьких квадратов до большого квадрата и отметим на большом квадрате точки, в которых прямые пересеклись. Получилось, что стороны квадрата разбились на некоторые горизонтальные и вертикальные отрезки длин a_i, b_j соответственно. Теперь вычислим, чему равна сумма всех горизонтальных сторон всех маленьких квадратов. В каждой полосе $n \times a_i$ пересекли ровно k квадратов, а значит, в данной полосе сумма горизонтальных частей сторон маленьких квадратов равна $a_i \cdot (k+1)$. Тогда сумма всех горизонтальных сторон маленьких квадратов равна $(\sum a_i)\cdot(k+1) = n\cdot(k+1)$. Аналогично можно вычислить сумму всех вертикальных сторон маленьких квадратов, получим $n\cdot(l+1)$. Таким образом, так как у каждого квадрата длины вертикальных и горизонтальных сторон равны, то получается, что $n \cdot (k+1) = n \cdot (l+1)$, то есть $k = l$, что и требовалось доказать. $\square$

6. Так как $f(x)$ - многочлен, что его можно представить в следующем виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k.$$

Обозначим за l количество корней, которые больше a, за m количество корней, которые больше b. Тогда по правилу Декарта $l \leqslant N(a)$ и $l \equiv N(a)$ по модулю 2, и аналогично $m \leqslant N(b)$ и $m \equiv N(b)$ по модулю 2, откуда получаем, что так как общее количество корней (с учетом кратности) равно $l - m$, то $l - m \leqslant N(a) - N(b)$ и $l - m \equiv N(a) - N(b) (\mod 2)$, что и требовалось доказать. $\square$

ФИНАЛ. «Интернациональный флекс» VS «Недоматематики» VS «Пожарники»

Условия задач

1. На одну из сторон угла, образованного двумя зеркалами, падает луч. Докажите, что он отразится от зеркал конечное число раз.

2. Город имеет вид прямоугольника $m \times n$ улиц. На улицах (не на перекрестках) стоят сотрудники ГИБДД. Каждый сообщает номер проехавшего мимо автомобиля и направление, в котором он ехал. Какое наименьшее количество сотрудников нужно, чтобы восстановить путь любого автомобиля, едущего по простому замкнутому маршруту? Простой замкнутный маршрут - маршрут без самопересечений, то есть маршрут, в котором каждый перекресток города участвует не более одного раза.

3. Рассматривается последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...$ Существует ли бесконечная арифметическая прогрессия (разность которой не равна 0), составленная из членов этой последовательности?

4. Докажите, что если p - нечетное простое число, то

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 2^{2p-2} (\frac{p-1}{2}!)^2 (\mod p^2).$$

5. Известно, что все корни полинома $P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + ... + c_n$ с комплексными коэффициентами - чисто мнимые. Докажите, что при любом вещественном x выполнено неравенство: $|\frac{2xP'(x)}{P(x)} - n| \leqslant n$.

6. Вычислите следующий определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & \dots & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & \dots & x^2 \\ 1 & 3 & 3 \cdot 2 & 3! & \dots & x^3 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & n & n \cdot (n-1) & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) & \dots & x^n \end{vmatrix}.$$

<u>Результаты боя</u>

№ задачи		A Интернациональный флекс	B Недоматематики	C Пожарники	Жюри
4	A ⇄ B	0	6	0	6
3	B → C	5	0	4	3
2	C → A	12	0	0	0
5	A → B	0	12	0	0
6	B ⇄ C	0	12	0	0
1	C → A	12	0	0	0
Итог:		**29**	**30**	**4**	

<u>Решения</u>

1. Обозначим угол между зеркалами за α, угод падения луча за β. Тогда после того, как луч один раз отразится от зеркала, он будет падать на второе зеркало под углом $\pi - \alpha - \beta$. Если этот угол будет острый, то луч больше не будет отражаться от зеркал. Если этот угол будет прямой, то луч пойдет по своему маршруту в обратном порядке и больше не будет отражаться от зеркал. Рассмотрим случай, когда $\pi - \alpha - \beta > \frac{\pi}{2}$, то есть $\beta < \frac{\pi}{2} - \alpha$. То есть при таком значении угла падения луч хотя бы еще один раз отразится от зеркала. Рассмотрим следующий шаг. Теперь угол падения равен $\alpha + \beta$, то есть угол падения с каждым шагом увеличивается на α, при этом как только угол падения станет больше или равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$, то можно гарантировать, что процесс закончится. Так как α - это некоторое фиксированное положительное число, то рано или поздно угол падения станет больше или равен $\frac{\pi}{2} - \alpha$, а значит, луч отразится конечное число раз, что и требовалось доказать. $\square$

2. Рассмотрим данный город как граф: перекрестки - это вершины, улицы - это ребра. Предположим, что сотрудники ГИБДД расставлены некоторым образом, удалим все ребра, на которых они стоят. Если в оставшемся графе будет существовать цикл, значит, сотрудники ГИБДД не смогут заметить машину, которая будет ехать по этому маршруту. Таким образом, после удаления, циклов быть не должно, и так как мы хотим найти минимальное количество сотрудников ГИБДД, значит, хотим, чтобы после удаления осталось максимально возможное количество ребер, значит, после удаления должен остаться граф - дерево. Раз всего вершин $m \cdot n$, значит после удаления могло остаться не более $m \cdot n - 1$ ребер, значит, сотрудников ГИБДД должно быть не менее $2m \cdot n - m - n - (m \cdot n - 1) = (m-1) \cdot (n-1)$, так как всего улиц $m \cdot (n-1) + n \cdot (m-1)$. Докажем, что $(m-1) \cdot (n-1)$ сотрудников будет достаточно. Расставим их следуюшим образом: на всех горизонтальных улицах кроме одного ряда поставим сотрудника ГИБДД. Заметим, что не существует машрута, который не проходил бы ни через одного сотрудника ГИБДД. Значит, хотя бы один раз сотрудник ГИБДД сможет увидеть машину. То есть будет известно, что машина проехала в некотором фиксированном столбце по улице с известным номером. Если в следующем столбце сотрудник ГИБДД не заметил машину, значит, машина проехала по ряду, в котором сотрудников ГИБДД нет. Так как между соседними столбцами и любыми двумя фиксированными горизонатльными улицами существует только один способ проезда, то при такой расстановке сотрудников ГИБДД любой маршрут может быть восстановлен. $\square$

3. Предполжим, что такая последовательность существует, обозначим ее как $\{b_n\}$, знаменатели элементов этой последовательности тоже будут являться некоторой последовательностью, обозначим ее за $\{a_n\}$. Рассмотрим элемент нашей последовательности $b_n = b_0 + dn$, где d - разность арифметической прогрессии, тогда $\frac{1}{a_n} = b_0 + dn$, откуда получаем, что

$$a_n = \frac{1}{b_0 + dn} = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + dn} = \frac{a_0}{1 + a_0 dn}.$$

Заметим, что a_n должно быть натуральным для всех натуральных n при некоторых фиксированных значениях a_0, d, каждое из которых не равно 0 по условию задачи. Но так как при $n > \frac{a_0 - 1}{a_0 d}$ числитель a_0 станет меньше знаменателя $1 + a_0 dn$, то значит, элемент последовательности a_n перестанет быть натуральным, что противоречит условию задачи. Таким образом, такой последовательности не существует. $\square$

4. В данной задаче просят доказать следующее сравнение

$$(p-1)! \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 2^{2p-2} (\frac{p-1}{2}!)^2 (\mod p^2),$$

разделим обе части сравнения на $(\frac{p-1}{2})!$. Получим следующее:

$$\frac{p+1}{2} \cdot \frac{p+3}{2} \cdot ... \cdot \frac{p+p-2}{2} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 2^{2p-2} (\frac{p-1}{2})! (\mod p^2).$$

Умножим обе части сравнения на $2^{\frac{p-1}{2}}$, получим следующее

$$(p+(p-2)) \cdot ... \cdot (p+3) \cdot (p+1) \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} 2^{2p-2} (p-(p-2)) \cdot ... \cdot (p-3) \cdot (p-1) (\mod p^2).$$

Назовем это сравнение - сравнение $(*)$. Найдем, с чем сравнимо выражение $(p + (p-2)) \cdot ... \cdot (p+3) \cdot (p+1)$ по модулю p^2. Для этого посмотрим на это выражение как на многочлен от p, которое является первым слагаемым в каждом множителе. Раскрыв скобки, получим, что все слагаемые, которые содержат в себе p в степени больше 1, делятся на p^2, поэтому выражение $(p+(p-2)) \cdot ... \cdot (p+3) \cdot (p+1)$ по модулю p^2 сравнимо с

$$(p-2)!! \cdot (1 + p \cdot (1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2})).$$

Аналогичным способом, можно вычислить, что по модулю p^2 выражение

$$(p-(p-2)) \cdot ... \cdot (p-3) \cdot (p-1)$$

сравнимо с

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-2)!! \cdot (1 - p \cdot (1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2})).$$

Подставляя полученные результаты в сравнение $(*)$ и упрощая, получим, что осталось доказать, что

$$1 + p \cdot (1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2}) \equiv 2^{2p-2}(1 + p \cdot (1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2}))(\mod p^2),$$

что равносильно тому, чтобы доказать, что выражение

$$2^{2p-2} - 1 - 2p(\cdot 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2})$$

делится на p^2. По теореме Эйзенштейна известно, что

$$p(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{p-2}) \equiv 2^{p-1} - 1(\mod p^2),$$

тогда осталось доказать, что $2^{2p-2}-1-2\cdot(2^{p-1}-1)$ делится на p^2. Преобразуем, получим следующее $2^{2p-2} - 1 - 2 \cdot (2^{p-1} - 1) = (2^{p-1} - 1)^2$, что делится на p^2 по малой теореме Ферма. Таким образом, исходное сравнение доказано. $\square$

5. Пусть $P(x) = (x-a_1)^{k_1} \cdot ... \cdot (x-a_m)^{k_m}$, где $Re(a_s) = 0$ и $\sum\limits_{s=1}^{m} k_s = n$. Тогда $|\frac{2xP'(x)}{P(x)} - n| = |2x\sum\limits_s \frac{k_s}{x-a_s} - \sum\limits_s k_s| = |\sum\limits_s k_s \frac{x+a_s}{x-a_s}| \leqslant \sum\limits_s k_s |\frac{x+a_s}{x-a_s}| = \sum\limits_s k_s = n$, так как модуль суммы больше суммы модулей. Таким образом, неравенство доказано. $\square$

6. Обозначим данный определитель за

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 1! & 0 & 0 & ... & x \\ 1 & 2 & 2! & 0 & ... & x^2 \\ 1 & 3 & 3 \cdot 2 & 3! & ... & x^3 \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & \vdots \\ 1 & n & n \cdot (n-1) & n \cdot (n-1) \cdot (n-2) & ... & x^n \end{vmatrix}.$$

Докажем по индукции, что $D_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} k!(x-1)^n$. База: $n=1, D_1 = x-1$. Переход. Предположим, что $D_{n-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-2} k!(x-1)^{n-1}$, докажем, что тогда из этого будет следовать, что $D_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} k!(x-1)^n$. Рассмотрим определитель D_n. Из каждой строки (кроме первой) вычтем строку, которая находится над ней, получим следующее:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & x-1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & ... & x^2-x \\ 0 & 1 & 2\cdot 2 & 3! & ... & x^3-x^2 \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cdot(n-1) & 3\cdot(n-1)\cdot(n-2) & ... & x^n-x^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & x-1 \\ 1 & 2 & 0 & ... & x^2-x \\ 1 & 2\cdot 2 & 3! & ... & x^3-x^2 \\ \vdots & ... & ... & ... & \vdots \\ 1 & 2\cdot(n-1) & 3\cdot(n-1)\cdot(n-2) & ... & x^n-x^{n-1} \end{vmatrix} = (n-1)!\cdot(x-1)\cdot D_{n-1}.$$

Тогда по индукционному предположению получаем, что

$$D_n = (n-1)!\cdot(x-1)\cdot D_{n-1} = (n-1)!\cdot(x-1)\cdot\prod_{k=1}^{n-2} k!(x-1)^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} k!(x-1)^n.$$

Таким образом, переход доказан, а значит, $D_n = \prod\limits_{k=1}^{n-1} k!(x-1)^n$, что мы и хотели доказать. $\square$