α

Лекция 1

«Аффинные пространства и их преобразования»

Содержание лекции:
Лекция посвящена

Ключевые слова:
Аффинное пространство

Автор курса:

Александр Трифанов

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

1.1 Аксиомы Вейля

> **Аффинным пространством** называется тройка $\mathcal{A} = (S, V, g)$, где S - множество (элементы которого мы будем называть "точками"), V - векторное пространство и отображение g
> $$g: \quad S \times V \to S,$$
> сопоставляющее каждой паре $(P, \vec{v}) \in S \times V$ элемент $g(P, \vec{v})$ множества S.

Nota bene Композицию g принято обозначать аддитивно:

$$g(P, \vec{v}) = P + \vec{v}.$$

Nota bene Свойства композиции g (аксиомы Вейля):

1. для любой точки P имеет место
$$P + \vec{0} = P,$$
2. для любой точки $P \in S$ и для любых $\vec{v}, \vec{w} \in V$ имеет место:
$$P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w},$$
3. для любой упорядоченной пары (P, Q) точек из S существует единственный элемент из $\vec{v} \in V$:
$$Q = P + \vec{v}.$$

Nota bene Часто вводят следующее обозначение: если $P + \vec{v} = Q$, то будем обозначать элемент $\vec{v} \in V$ посредством $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Лемма 1.1. *Пусть $P, Q, R \in S$ - произвольные точки множества S, тогда*

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$$

►
Введем обозначения $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ и $\vec{w} = \overrightarrow{QR}$, тогда аксиома (1) дает

$$P + \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\right) = \left(P + \overrightarrow{PQ}\right) + \overrightarrow{QR} = Q + \overrightarrow{QR} = R,$$

Затем из аксиомы (2) требуемое.
◄

Лемма 1.2. *Имеет место векторное равенство*

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

►
В случае $R = P$ будем иметь

$$P + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = P \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}.$$

◄

Nota bene Из предыдущей леммы, в частности, следует что $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$

1.2 Векторизация аффинного пространства

Векторизацией аффинного пространства (S, V, g) относительно точки $O \in S$ называется отображение $\sigma_o : S \to V$, такое что

$$\sigma_o(P) = \overrightarrow{OP} = \vec{v}_P, \quad \forall P \in S.$$

и при этом $P = O + \overrightarrow{OP}$ и вектор $\overrightarrow{OP}$ называется **радиусом-вектором** точки P относительно точки O.

Теорема 1.1. *Для любой точки $O \in S$ векторизация σ_o является взаимно-однозначным соответствием (биекцией) между S и V.*

▶

Иньективность:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \quad \Rightarrow \quad P = Q.$$

Действительно:

$$P = O + \overrightarrow{OP} = O + \overrightarrow{OQ} = Q.$$

Сюрьективность:

$$\forall \vec{v} \in V \quad \exists P \in S : \quad P = O + \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{OP}.$$

◀

Размерностью аффинного пространства $\mathcal{A} = (S, V, g)$ называется размерность соответствующего векторного пространства V:

$$\dim \mathcal{A} = \dim V.$$

Nota bene В зависимости от размерности пространство $\mathcal{A}$ называется

- аффинной прямой, если $\dim \mathcal{A} = 1$;
- аффинной плоскостью, если $\dim \mathcal{A} = 2$;
- аффинным пространством, если $\dim \mathcal{A} \geq 3$.

1.3 Объекты аффинного пространства

Прямой в аффинном пространстве $\mathcal{A}$ называется подмножество точек S вида:

$$L = \{P_0 + \vec{u} : \quad P_0 \in S, \quad \vec{u} \in U\},$$

где $U \subset V$ - одномерное подпространство V называется **направляющим подпространством** прямой L.

Лемма 1.3. *Прямая - одномерное аффинное пространство* $\mathcal{A}_{\mathcal{L}} = (L, U, g)$.

Nota bene Пусть $P_0 \in L$ произвольно выбранная точка на прямой и σ_o - векторизация $\mathcal{A}$ относительно точки O, и пусть $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$, $\overrightarrow{OP_0} = \vec{r}_0$, тогда для любой точки $P \in L$ будем иметь :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{u}.$$

что совпадает с привычным определением прямой.

Плоскостью в аффинном пространстве $\mathcal{A}$ называется подмножество точек S вида:

$$\mathcal{P} = \{P_0 + \vec{w} : \quad P_0 \in S, \quad \vec{w} \in W\},$$

где $W \subset V$ - двумерное подпространство V называется **направляющим подпространством** плоскости $\mathcal{P}$.

Лемма 1.4. *Плоскость - двумерное аффинное пространство* $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, W, g)$.

Nota bene Аналогично случаю с прямой при векторизации относительно точки O будем иметь :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{w} = \vec{r}_0 + \vec{a} + \vec{b},$$

где $\vec{a}, \vec{b} \in W$ - два неколлинеарных вектора.

Пусть $\mathcal{A}_1 = (S_1, V_1, g)$ и $\mathcal{A}_2 = (S_2, V_2, g)$ - два аффинных подпространства аффинного пространства $\mathcal{A} = (S, V, g)$. **Пересечение** $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ называется тройка $\mathcal{A}_\cap = (S_\cap, V_\cap, g)$, так что

$$S_\cap = S_1 \cap S_2, \quad V_\cap = V_1 \cap V_2,$$

где первое пересечение является теоретико-множественным, а второе - пересечением линейных подпространств.

Теорема 1.2. *Результат пересечения двух аффинных подпространств есть аффинное подпространство.*

1.4 Координаты в аффинном пространстве

Системой координат в аффинном пространстве $\mathcal{A} = (S, V, g)$ называется пара $m_o = \left(O, \{\vec{e}_j\}_{j=1}^n\right)$, состоящая из произвольно выбранной точки $O \in S$ и произвольно выбранного базиса $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ пространства V.

Nota bene При векторизации σ_o пространства относительно точки O координатами точки P будет набор $\{\xi^j\}_{j=1}^n$, такой что

$$P \to \sigma_o(P) = \overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^n \xi^j \vec{e}_j.$$

Nota bene Пусть $\{\xi^j\}_{j=1}^n$ координаты точек P в системе координат m_o и $\{\eta^j\}_{j=1}^n$ - координаты точки Q в той же системе. Тогда из соотношения

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{v},$$

следует выражение для координат вектора $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \left(\xi^j - \eta^j\right) \vec{e}_j.$$

1.5 Барицентрические координаты

Барицентрической линейной комбинацией точек $\{P_i\}_{i=1}^k \in \mathcal{A}$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется выражение вида

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Nota bene При векторизации σ_o аффинного пространства барицентрическая линейная комбинация задает точку $P \in S$, чей радиус-вектор равен

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i}$$

Лемма 1.5. *Точка P - результат барицентрической линейной комбинации точек $\{P_i\}_{i=1}^k$ - определена корректно.*

▶

Пусть O' - другая точка, тогда

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'O} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{O'P_i},$$

где было использовано свойство $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

◀

Система точек $\{P_i\}_{i=0}^k$ называется **аффинно-независимой**, если никакую из этих точек нельзя представить в виде барицентрической линейной комбинации остальных.

Лемма 1.6. *Система точек $\{P_i\}_{i=0}^k$ аффинно-независима тогда и только тогда, когда система векторов $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}_{i=1}^k$ линейно-независима.*

►
Необходимость: Пусть P_0 представляется барицентрической линейной комбинацией остальных точек $\{P_i\}_{i=1}^k$, то есть

$$P_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

тогда

$$\vec{0} = \overrightarrow{P_0P_0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

- нетривильная линейная комбинация векторов равная нулю.
Достаточность: Пусть

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i}$$

- нетривиальная линейная комбинация векторов, равная нулю. Если $\sum_{i=1}^k \lambda_i \neq 0$, то без ограничения общности можно считать, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Пусть

$$P = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{P_0P_i} = \vec{0},$$

и следовательно $P = P_0$. Пусть $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, но $\lambda_1 \neq 0$. Используем соотношение:

$$\overrightarrow{P_0P_i} = -\overrightarrow{P_1P_0} + \overrightarrow{P_1P_i},$$

получаем линейную зависимость

$$\vec{0} = \lambda_0 \overrightarrow{P_1P_0} + \lambda_2 \overrightarrow{P_1P_2} + \ldots + \lambda_k \overrightarrow{P_1P_k},$$

в которой

$$\lambda_0 = -\lambda_1 - \lambda_2 - \ldots - \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = -\lambda_1 \neq 0,$$

и значит P_1 является барицентрической линейной комбинацией точек $\{P_0, P_2, \ldots, P_k\}$.
◄

Теорема 1.3. *Для любой точки $P \in S$ существует единственная упорядоченная совокупность чисел $\{x^i\}_{i=1}^k$ с условием $\sum_{i=1}^k x^i = 1$, такая что*

$$P = \sum_{i=1}^k x^i P_i$$

►
Разложим вектор $\overrightarrow{P_0P}$ по базису $\left\{\overrightarrow{P_0P_i}\right\}_{i=1}^k$:

$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^k x^i \overrightarrow{P_0P_i}, \quad x^i \in \mathbb{R}.$$

Пусть $x^0 = 1 - \sum_{i=1}^k x^i$ и тогда
$$P = \sum_{i=1}^k x^i P_i.$$
Пусть теперь $P = \sum_{i=1}^k x^i P_i = \sum_{i=1}^k y^i P_i$, причем
$$\sum_{i=1}^k x^i = \sum_{i=1}^k y^i = 1.$$
Рассматривая векторизацию относительно точки P_0 получаем
$$\overrightarrow{P_0P} = \sum_{i=1}^k x^i \overrightarrow{P_0P_i} = \sum_{i=1}^k y^i \overrightarrow{P_0P_i}, \quad \Rightarrow \quad x^i = y^i,$$
и значит $x^0 = y^0$. ◀

Nota bene Барицентрические координаты (x^0, x^1, x^2) точки P имеют простой физический смысл: они равны массам (не обязательно положительным, но удовлетворяющим условию $x^0 + x^1 + x^2 = 1$), которые нужно поместить в точки P_0, P_1, P_2 , чтобы P была центром масс такой системы. В частности, все $x^i > 0$ тогда и только тогда, когда точка p лежит внутри треугольника с вершинами в точках P_0, P_1, P_2.

1.6 Аффинные преобразования

Пусть $\mathcal{A} = (S, V, g)$ - аффинное пространство.

> Отображение $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется аффинным преобразованием, если $\forall P \in S$ и $\forall \vec{v} \in V$
> $$\varphi\left(P + \vec{v}\right) = \varphi(P) + d\varphi\left(\vec{v}\right),$$
> где $d\varphi$ - линейное преобразование, называемое дифференциалом φ.

Лемма 1.7. *Аффинное преобразование полностью определяется своим дифференциалом $d\varphi$ и действием на некоторою точку $P \in S$:*

▶

Действительно, пусть $Q \in S$, тогда
$$\varphi(Q) = \varphi\left(P + \overrightarrow{PQ}\right) = \varphi(P) + d\varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right).$$
◀

Лемма 1.8. *Дифференциал $d\varphi$ полностью восстанавливается по отображению φ:*
$$d\varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right) = \overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}.$$

Nota bene Пусть $\varphi\left(P+\vec{v}\right)=\varphi(P)+d\varphi\left(\vec{v}\right)$, тогда

$$\varphi\left(Q+\vec{v}\right)=\varphi\left(\left(P+\overrightarrow{PQ}\right)+\vec{v}\right)=\varphi\left(P+\left(\overrightarrow{PQ}+\vec{v}\right)\right)=\varphi(P)+d\varphi\left(\overrightarrow{PQ}+\vec{v}\right)=$$
$$=\varphi(P)+d\varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right)+d\varphi\left(\vec{v}\right)=\varphi(P)+\overrightarrow{\varphi(P)\varphi(Q)}+d\varphi\left(\vec{v}\right)=\varphi(Q)+d\varphi\left(\vec{v}\right).$$

Пример 1.1. Примеры аффинных преобразований:

1. тождественное преобразование $\varphi=id_S$:
$$id_S\left(P+\vec{v}\right)=P+\vec{v}$$
2. параллельный перенос $\varphi=t_{\vec{w}}$:
$$t_{\vec{w}}\left(P+\vec{v}\right)=\left(P+\vec{w}\right)+\vec{v}$$
3. поворот аффинной плоскости $\varphi=R_\alpha$:
$$R_\alpha\left(P+\overrightarrow{PQ}\right)=R_\alpha(P)+r_\alpha\left(\overrightarrow{PQ}\right)=R_\alpha(P)+\overrightarrow{R_\alpha(P)R_\alpha(Q)}.$$

Nota bene Найдем вид преобразования R_α в декартовых координатах системы $m_o=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, когда поворот осуществляется вокруг точки $P\left(x_0,y_0\right)$. Имеем:

$$R_\alpha(Q)=R_\alpha(P)+r_\alpha\left(\overrightarrow{PQ}\right)=P+r_\alpha(\overrightarrow{PQ}),$$

тогда в координатах будем иметь:

$$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}.$$

Лемма 1.9. *Пусть φ_1 и φ_2 - аффинные преобразования аффинного пространства $\mathcal{A}$, тогда композиция $\varphi_2\circ\varphi_1$ также является аффинным преобразованием, причем $d(\varphi_2\circ\varphi_1)=(d\varphi_2)\circ(d\varphi_1)$.*

▶

Пусть $P\in S$ и $\vec{v}\in V$, тогда имеем:

$$\left(\varphi_2\circ\varphi_1\right)\left(P+\vec{v}\right)=\varphi_2\left(\varphi_1\left(P+\vec{v}\right)\right)=\varphi_2\left(\varphi_1(P)+d\varphi_2\left(\vec{v}\right)\right)=$$
$$=\varphi_2\left(\varphi_1\left(P\right)\right)+d\varphi_2\left(\varphi_1\left(\vec{v}\right)\right)=\left(\varphi_2\circ\varphi_1\right)\left(P\right)+\left(d\varphi_2\circ d\varphi_1\right)\left(\vec{v}\right)$$

◀

Лемма 1.10. *Аффинное преобразование $\varphi:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ биективно тогда и только тогда, когда линейное преобразование $d\varphi:V\to V$ биективно.*

Лемма 1.11. *ПУсть $\varphi:S\to S$ - биективное аффинное преобразование. Тогда φ^{-1} является также аффинным преобразованием, причем $d\left(\varphi^{-1}\right)=\left(\varphi^{-1}\right)^{-1}$.*

Лемма 1.12. *Биективные аффинные преобразования $\varphi:S\to S$ образуют группу относительно операции композиции.*

> Группа биективных аффинных преобразований называется **группой аффинных преобразований** аффинного пространства $\mathcal{A}$.